

# Comparação de Desempenho das Técnicas de Controle PID e por Modo Deslizante no Rastreamento de Trajetórias de um Sistema Dinâmico Não Linear com Motores de Hélice

**Edivaldo Sebastião da Silva Júnior \***

**Philippe Eduardo de Medeiros \*\***

*\* Estudante de Graduação, Curso de Engenharia Mecânica, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, Universidade Federal Rural de Pernambuco, PE, (e-mail: edivaldo.silvajunior@ufrpe.br).*

*\*\* Orientador do trabalho, Curso de Engenharia Mecânica, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, Universidade Federal Rural de Pernambuco, PE, (e-mail: philippe.medeiros@ufrpe.br).*

---

**Resumo:** Atualmente, sistemas de controle ganham cada vez mais destaque no meio científico e no meio industrial, essa maior abrangência dos sistemas de controle, se dá principalmente pelo avanço teórico e tecnológico da engenharia de controle. Esse avanço passa pela solidificação de técnicas de controle cada vez mais robustas, principalmente as técnicas de controle não linear. Diante deste fato, este trabalho consiste da comparação da técnica de controle linear PID e da técnica de controle não linear por modo deslizante, ambas as técnicas sendo aplicadas em um sistema dinâmico não linear de segunda ordem. A comparação do controle PID e do controle por modo deslizante, abordados neste trabalho, se deu a partir de simulações numéricas do sistema *Seesaw Propeller* e também por meio de experimento físico utilizando uma planta real do sistema. Os resultados apresentados neste trabalho contêm a performance individual de cada controlador, a partir de uma análise quantitativa de seu desempenho, essas análises foram feitas tanto para as simulações numéricas quanto para os experimentos realizados. Esses resultados estão expressos ao longo do trabalho por meio de gráficos e por meio da análise do erro quadrático médio apresentado por cada controlador.

**Palavras-chaves:** Controle PID; Controle por modo deslizante; Sistemas não lineares; Sistema *Seesaw Propeller*; Superfície de deslizamento.

**Abstract:** Currently, control systems are gaining more and more prominence in the scientific environment and in the industrial environment, this wider scope of control systems is mainly due to the theoretical and technological advances in control engineering. This advance involves the solidification of increasingly robust control techniques, especially non-linear control techniques. In view of this fact, this work consists of comparing the PID linear control technique and the non-linear sliding control technique, both techniques being applied in a second order nonlinear dynamic system. The comparison of the PID control and the control by sliding mode, discussed in this work, took place from numerical simulations of the *Seesaw Propeller* system and also through physical experiment using a real plant of the system. The results presented in this work contain the individual performance of each controller, from a quantitative analysis of its performance, these analyzes were made for both the numerical simulations and the experiments carried out. These results are expressed throughout the work by means of graphs and through the analysis of the mean square error presented by each controller.

**Keywords:** PID control; Sliding mode control; Nonlinear systems; Seesaw Propeller System; Sliding surface.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Na grande parte dos problemas da engenharia moderna relacionados ao controle, sejam eles: controle de processos, controle de posição, controle de qualidade, etc, um dos principais desafios para todo engenheiro é a escolha correta do tipo de controlador a ser usado no sistema, a fim de se obter os melhores resultados possíveis e extrair o máximo de desempenho do sistema como um todo. Na maioria das vezes a escolha do tipo de controlador é um enorme desafio para qualquer projetista. Por se tratar de um assunto bastante difundido ao longo dos anos, existem diversas técnicas e abordagens matemáticas distintas relacionadas à engenharia de controle. Vários aspectos devem ser levados em consideração para a análise do tipo de controlador ideal, por exemplo: a dinâmica do sistema, o atrito, uma possível histerese do sistema, entre outros. Diante de todos esses aspectos, o controlador é uma peça chave para um bom desempenho do sistema e consequentemente para sua aplicação. Para cada tipo de controlador, seja ele linear ou não linear, existem diversas abordagens matemáticas relacionadas a modelagem do sistema e ao projeto do controlador. Esses dois tipos de controlador possuem grandes diferenças nas suas aplicabilidades em sistemas como um todo.

Os controladores lineares se consolidaram ao longo da história em diversas aplicações industriais com um alto grau de sucesso. Com passar do tempo, houve uma enorme variedade de métodos de controle linear, sendo o PID (proporcional integral derivativo) o principal deles. Os controladores lineares dependem fundamentalmente da hipótese principal de operação em pequenas faixas de operação para o modelo ser válido. Isso acontece porque quando se tem um aumento dessa faixa, muito provavelmente, o mesmo não conseguirá suprir tal demanda, podendo causar instabilidade ao sistema e consequentemente um mau desempenho do controlador. Isso geralmente acontece pela incapacidade do controlador linear compensar as não linearidades do sistema.

Os controladores não lineares possuem técnicas e modelos matemáticos bem mais robustos e completos, em comparação com os controladores lineares. Isso se deve principalmente pela capacidade de operação que um controlador não linear possui em uma grande faixa de operação do sistema, que por sua vez possibilita sua aplicação em sistemas com uma ou mais não linearidades. A capacidade do controlador não linear de entregar um bom desempenho em situações na qual o sistema apresenta não linearidades que não podem ser compensadas por técnicas lineares, é uma de suas principais características. Vale destacar que os controladores não lineares apresentam desempenhos bastante satisfatórios em sistemas que possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas, com uma enorme capacidade de corrigir efeitos de perturbações presentes diretamente ou indiretamente no sistema (ÜTKIN, 1992).

Segundo SLOTINE and LI (1991), controladores não lineares podem lidar com não linearidades na operação de grande alcance diretamente. Este ponto é facilmente demonstrado em problemas de controle de trajetória de robôs. Quando um controlador linear é usado para controlar um robô, negligencia-se as forças não lineares

associadas ao movimento da base do robô. A precisão do controlador, portanto, degrada rapidamente à medida que a velocidade do movimento aumenta, porque muitas das forças dinâmicas envolvidas, como Coriolis e forças centrípetas, variam como o quadrado da velocidade. Por consequência, a fim de alcançar uma precisão nas tarefas do robô, como *pick-and-place*, soldagem a arco e corte a laser, a velocidade do movimento do robô e, portanto, a produtividade, devem ser mantida baixa. Por outro lado, um controlador não linear conceitualmente simples, pode compensar totalmente as forças não lineares do movimento do robô e levar a um controle de alta precisão para uma grande variedade de velocidades e um grande espaço de trabalho.

Sistemas dinâmicos não lineares com motores de hélice são sistemas comumente encontrados na engenharia para aplicações envolvendo drones, helicópteros, entre outros. O sistema analisado no presente trabalho, conhecido como *Seesaw Propeller*, consiste em uma barra com motores nas suas extremidades, os quais possuem a função de fornecer uma determinada trajetória a barra ao longo do tempo. Esse sistema também pode ser interpretado como o problema de controle de um grau de liberdade de um drone. BERTOLDO (2019), realizou um estudo sobre um sistema bastante semelhante ao sistema *Seesaw Propeller*, para obter um modelo matemático ARIMAX de propulsores eletromecânicos a partir dos dados gerados durante os experimentos, o principal objetivo desse trabalho era aplicar a dinâmica semelhante do sistema *Seesaw Propeller* na elaboração de veículos aéreos não tripulados (VANTS).

Diante de tais aspectos, este trabalho tem como principal objetivo explorar as diferenças envolvidas na aplicação desses dois tipos de controlador em um sistema dinâmico não linear com motores de hélice, mostrando uma análise comparativa de desempenho entre eles. O tipo de controlador linear que será abordado no trabalho é o controlador PID, já o modelo de controlador não linear escolhido foi o controlador por modo deslizante. Primeiramente, uma análise teórica de cada técnica é feita, mostrando a sua implementação no controle do sistema *Seesaw Propeller*. Em seguida, simulações numéricas são apresentadas mostrando o desempenho das técnicas utilizadas, assim como a análise dos resultados referentes ao comportamento do sistema de forma geral. Por fim, a implementação do controlador linear e do controlador não linear é feita em um microcontrolador e aplicada a um sistema físico semelhante ao sistema investigado nas simulações numéricas. Essa aplicação em uma planta de simulação real tem como principal finalidade obter resultados reais do desempenho de cada controlador. Com os resultados das simulações numéricas e os resultados dos experimentos da planta, será possível identificar a capacidade de aplicação de cada controlador, bem como a sua viabilidade no controle de sistemas dinâmicos não lineares.

## 2. CONTROLE LINEAR

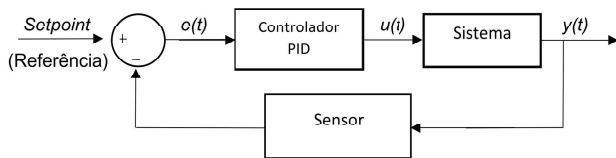
Um dos principais controladores lineares atualmente usados na indústria é o controlador PID, que significa Controlador Proporcional-Integral-Derivativo. Este tipo de controlador representa um mecanismo de realimentação em malha fechada que possui uma considerável robustez



quando aplicado em sistemas com uma única entrada e uma única saída (*Single Input Single Output* - SISO). De acordo com OGATA (2010), a utilidade dos controladores PID está na sua aplicabilidade geral à maioria dos sistemas de controle. Em particular, quando o modelo matemático da planta não é conhecido e, portanto, métodos de projeto analítico não podem ser utilizados, controles PID se mostram como os mais úteis.

O controlador PID calcula de maneira contínua um valor de erro,  $e(t)$ , como a diferença entre um valor de referência (*setpoint*) e um valor de saída do sistema,  $y(t)$ , e a partir desse valor de erro, aplica uma correção ou compensação,  $u(t)$ , diretamente ao sistema, em termos proporcionais, integrais e derivativos. A figura (1) mostra a representação esquemática da atuação do controle PID em um sistema.

Figura 1. Diagrama de blocos representando o esquema do controlador PID.



Fonte: Autoria Própria.

## 2.1 Equação do Controlador PID

Segundo DORF (2001), apud BENNETT (1993), a popularidade dos controladores PID pode ser atribuída parcialmente ao seu desempenho robusto sobre uma grande faixa de condições operacionais e em parte à sua simplicidade funcional, que permite aos engenheiros operá-los de uma maneira simples. Para implementar um controlador como este, três parâmetros devem ser determinados para um dado processo: o ganho proporcional, o ganho integral e o ganho derivativo.

O controlador PID é descrito pela seguinte equação:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \dot{e}(t) \quad (1)$$

sendo  $e(t)$  o erro do sistema,  $\dot{e}(t)$  a derivada do erro,  $K_p$  a constante proporcional,  $K_i$  a constante integral e  $K_d$  a constante derivativa do erro. Esses parâmetros  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  são responsáveis diretamente pelo desempenho do sistema. Cada um deles produz um efeito distinto na atuação do controlador, que podem ser descritos da seguinte maneira:

- A constante proporcional do erro ( $K_p$ ) atua diretamente na amplitude do erro produzido, ou seja, para erros grandes, a constante proporcional irá atuar com um sinal amplificado a fim de reduzir rapidamente a sua amplitude. A medida que o erro diminui, o termo proporcional também reduz a intensidade do esforço de controle. O termo proporcional também possui relação com a velocidade de resposta do controlador PID, sendo essa relação responsável por tentar inibir um aumento gradativo no valor do erro.
- Para que seja eliminado o erro residual, ou erro de regime, que graficamente seria a área entre o *setpoint*

e o valor da saída  $y(t)$ , é necessário que o controlador desenvolva uma ação integrativa. A ação integrativa desenvolvida pela constante  $K_i$  tem como objetivo eliminar o erro em regime estacionário do sistema, ou seja, fazer com que o controlador PID seja capaz de convergir o valor de saída do sistema,  $y(t)$ , para o valor estabelecido como referência ao controlador.

- Por fim, temos a atuação do termo derivativo. Apesar da atuação dos termos proporcional e integrativo, sabemos que sistemas dinâmicos envolvem muitas vezes mudanças bruscas nas suas respostas. Tal ação produz inevitavelmente uma mudança rápida no erro do sistema, com isso, a constante  $K_d$  associada ao controlador atua diretamente na velocidade da mudança do erro. Então, o termo derivativo identifica possíveis variações de erro e exerce ações contrárias a essas variações, fazendo com que o sistema responda bem a possíveis perturbações na planta.

Apesar de a equação (1) apresentar de forma clara e objetiva cada termo de um controlador PID, ela não é muito útil para implementação desse controlador na prática. Para isso, é necessário escrever a equação (1) de forma discreta, da seguinte maneira:

$$u[n] = K_p e[n] + K_i T \sum_{j=0}^n e[j] + K_d \frac{e[n] - e[n-1]}{T} \quad (2)$$

onde  $n$  é o número da amostra e  $T$  é o período de amostragem. Dessa forma, um algoritmo de controle PID pode ser facilmente implementado em simulações numéricas e em microcontroladores.

A sintonia de um controlador PID é um dos principais pontos para a sua implementação em qualquer sistema, afetando diretamente a sua performance. Um dos principais métodos utilizados para a sintonia do controle PID é o método proposto Ziegler-Nichols. Este método baseia-se na análise da resposta do sistema em malha fechada, na qual é feita a determinação do valor crítico para o termo proporcional,  $k_{cr}$ , e associado a esse parâmetro, determina-se o período crítico,  $P_{cr}$ , da resposta oscilatória do sistema. Além desse tipo de sintonia, outro método bastante utilizado é o método por tentativa e erro, na qual é feita a análise do sistema zerando dois termos do controlador e observando a resposta do sistema para o terceiro termo não nulo, ajustando-o de forma gradativa. Por fim, é feita a análise do sistema com os valores estimados para cada termo do controlador.

## 3. CONTROLE NÃO LINEAR

O controle por Modo Deslizante é uma teoria de controle não linear robusta. Uma de suas principais características é a aplicação em sistemas não lineares que apresentem incertezas em sua modelagem. Existem dois tipos principais de incertezas na modelagem de um sistema não linear:

- Incertezas estruturadas;
- Incertezas não estruturadas.

O primeiro tipo de incerteza está associada aos parâmetros reais do sistema, como por exemplo: massa, comprimento, altura, momento de inércia, etc, já as incertezas não estruturadas estão ligadas às imprecisões da

ordem do sistema, como por exemplo: simplificação das equações diferenciais, não levar em conta perturbações ou forças atuantes no sistema, etc.

Diante de tais aspectos, é preciso um sistema de controle capaz de lidar diretamente com às incertezas do sistema não linear de forma a entregar um bom desempenho ao mesmo. O controle por Modo Deslizante é capaz de lidar diretamente com essas incertezas, pois se trata de um controlador bastante robusto no que diz respeito a sua lei de controle. Segundo SLOTTINE and LI (1991), a estrutura típica de um controlador robusto é composta por uma parte nominal, semelhante a uma lei de linearização ou *feedback*, e de termos adicionais destinados a lidar com a incerteza do modelo.

De acordo com BESSA (2005), a ideia principal do controle por modos deslizantes consiste em transformar um problema de rastreamento de trajetória de ordem  $n$  em  $\mathbf{x}$ , onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de estados do sistema, em um problema de estabilização de primeira ordem em  $s$ , no qual  $s$  é definida como a superfície de deslizamento do controlador. Assim, a lei de controle  $u$  deve ser projetada de modo a garantir que  $\mathbf{x}$  alcance a superfície  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  em um dado intervalo de tempo finito, e que, após alcançada, siga (deslizando) exponencialmente sobre ela até atingir  $\mathbf{x}_d$ , onde  $\mathbf{x}_d$  é o vetor da trajetória desejada do sistema.

A partir dessa afirmação podemos dizer que o problema de estabilização em  $s$  passa necessariamente por duas etapas distintas: a primeira etapa seria uma etapa de aproximação, em que os estados constroem uma trajetória de  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  até a superfície de deslizamento  $s(\mathbf{x}, t) = 0$ , e a segunda etapa seria o modo deslizante, onde a trajetória dos estados do sistema estão restringidas a superfície de deslizamento.

Seja  $\tilde{\mathbf{x}}$  o erro do sistema,  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  o erro inicial do sistema em  $t = 0$ ,  $\lambda$  uma constante positiva da superfície de deslizamento e  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  a superfície de deslizamento, as duas etapas citadas acima podem ser compreendidas graficamente analisando a figura (2).

### 3.1 Superfície de deslizamento

A existência de um modo deslizante exige a estabilidade da trajetória do estado para a superfície de deslizamento, proporcionando ao sistema o controle ao deslizar pela superfície  $S(t)$ . Portanto, a lei de controle deve ser chaveada para assegurar que a trajetória do estado alcance a superfície de deslizamento e nela permaneça durante todo o tempo subsequente (DECARLO et al., 1988).

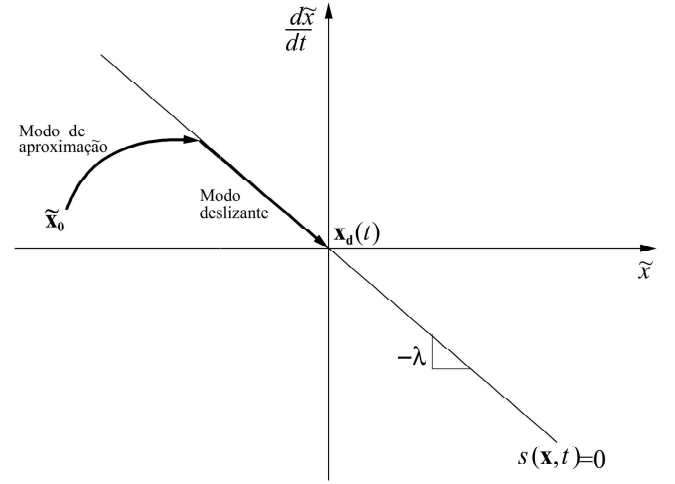
Vamos considerar uma superfície de deslizamento  $S(t)$ , definida por uma função escalar de  $s(\mathbf{x}, t) = 0$ , para um sistema de ordem  $n$ , pela seguinte equação:

$$s(\mathbf{x}, t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{\mathbf{x}} \quad (3)$$

em que  $\tilde{x} = x - x_d$  é o erro de rastreamento da trajetória, dado pela variável de estado  $x$  entre a posição do sistema e a posição desejada  $x_d$  e  $\lambda$  uma constante positiva da superfície de deslizamento.

Para um sistema de segunda ordem, ou seja,  $n = 2$ , a equação (3) pode ser reescrita da seguinte maneira:

Figura 2. Comportamento ilustrativo da evolução do modo deslizante no espaço de fase.



Fonte: BESSA (2005).

$$s(\mathbf{x}, t) = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0 \quad (4)$$

onde  $\dot{\tilde{x}}$  é a derivada do erro e  $\lambda$  é uma constante positiva. A equação (4) mostra o efeito da redução de um sistema de segunda ordem, em um sistema de primeira ordem dado pela superfície  $s(\mathbf{x}, t)$ . Além disso, integrando a equação (4) é possível mostrar o decaimento exponencial do erro para zero em  $s(\mathbf{x}, t) = 0$ :

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}, t) = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x} = 0 &\Rightarrow \frac{d\tilde{x}}{dt} + \lambda \tilde{x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = -\frac{1}{\lambda} dt &\Rightarrow \int \frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}} = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{x} = e^{-\lambda t} &\quad (5) \end{aligned}$$

BESSA (2005) propôs que para melhor compreender a filosofia do método, suponha, a princípio, que a trajetória desejada se inicie a partir do estado atual do sistema

$$x_d(0) = x(0) \quad (6)$$

ou seja, o problema de rastreamento começa com o erro sendo igual a zero,  $\tilde{x}(0) = 0$ , o que automaticamente implica em  $s(\mathbf{x}, t) = 0$ . Deste modo, bastaria que a lei de controle fosse projetada de modo a garantir que a dinâmica  $\dot{s}(\mathbf{x}, t) = 0$  fosse estabelecida, o que já seria suficiente para manter os estados na superfície de deslizamento. Pela equação (5), pode-se verificar que  $s(\mathbf{x}, t) = 0$  representa uma equação diferencial cuja solução implica na convergência exponencial de  $\tilde{x}$  a zero.

Essa hipótese em que o erro de rastreamento começa com um valor igual a zero dificilmente é vista na prática, por se tratar de problemas envolvendo sistemas não lineares, a chance de garantir um erro inicial com valor nulo diante das não linearidades é praticamente nula. Diante disso, o projeto do sistema de controle deve garantir a convergência da trajetória em  $S(t)$  mesmo que o erro inicial possua valores diferentes de zero.

### 3.2 Lei de Controle para o Modo Deslizante

Vamos considerar o seguinte sistema não linear e não autônomo:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(\mathbf{x}, t) + r(\mathbf{x}, t)u(t) \\ y = x \end{cases} \quad (7)$$

em que  $f(\mathbf{x}, t)$  é a função não linear que representa a dinâmica do sistema,  $r(\mathbf{x}, t)$  é uma função não linear de ganho do controlador e  $u(t)$  é a saída do sinal do controlador sobre o sistema. O problema de controle consiste em conduzir o vetor de estado  $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T$  para rastrear uma trajetória específica  $\mathbf{x}_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n-1)}]^T$ , na presença de incertezas no modelo de  $f(\mathbf{x}, t)$  e  $r(\mathbf{x}, t)$  (SLOTINE and LI, 1991). Para esse caso, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq \eta |s| \quad (8)$$

A condição na inequação (8) impõe que o quadrado da distância ( $s^2$ ) do estado atual do sistema até a superfície de deslizamento  $S(t)$ , diminua para qualquer trajetória que se inicie fora dela. Portanto, ao satisfazer a condição de deslizamento (como também é chamada esta inequação), o controlador resultante faz da superfície de deslizamento  $S(t)$  um conjunto invariante, ou seja, toda trajetória que se inicia em  $S(t)$  permanece em  $S(t) \forall t \geq 0$ .

A fim de garantir a condição de deslizamento sobre a superfície  $S(t)$ , usualmente o controle por modo deslizante necessita da inserção de um termo descontínuo à estrutura do controlador em  $s(\mathbf{x}, t) = 0$ , para garantir que as possíveis incertezas em  $f$  e  $g$  sejam devidamente compensadas.

A fim de facilitar o desenvolvimento matemático da lei de controle por modo deslizante, cabe a equação (3) uma representação da seguinte maneira:

$$s(\mathbf{x}, t) = \Lambda^T \tilde{\mathbf{x}} \quad (9)$$

onde  $\Lambda = [\lambda^{n-1} \ c_{n-1}\lambda^{n-2} \ \dots \ c_2\lambda \ c_1]^T$  e  $c_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$  são os coeficientes que fazem do polinômio  $\lambda^{n-1} + c_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + c_2\lambda + c_1$  um polinômio de Hurwitz.

A partir da equação (9), a derivada da superfície  $s$  em relação ao tempo pode ser dada por:

$$\dot{s}(\mathbf{x}, t) = \Lambda^T \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{x}^{(n)} + \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} = 0 \quad (10)$$

onde  $\Lambda_u = [0 \ \lambda^{n-1} \ c_{n-1}\lambda^{n-2} \ \dots \ c_2\lambda]$ .

Com isso, considerando o sistema (7), a equação (10) e considerando a condição inicial dada pela equação (6), chegamos em uma lei de controle para um sistema de ordem  $n$ , na forma de:

$$u(t) = r(\mathbf{x}, t)^{-1} [-f(\mathbf{x}, t) + x_d^{(n)} - \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}}] \quad (11)$$

onde  $x_d^{(n)}$  é a  $n$ -ésima derivada da trajetória desejada.

A equação (11) nos fornece uma lei de controle para um sistema de ordem  $n$ , porém ela não garante uma estabilidade ao sistema com condições iniciais diferentes da condição da equação (6). Para que a equação (11) possa garantir a estabilidade do sistema independente de suas condições iniciais, é preciso adicionar um termo contínuo ou descontínuo à estrutura do controlador. Adicionando

um termo descontínuo na estrutura da lei de controle, chegamos na seguinte equação:

$$u(t) = r(\mathbf{x}, t)^{-1} [-f(\mathbf{x}, t) + x_d^{(n)} - \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} - K \text{sgn}(s)] \quad (12)$$

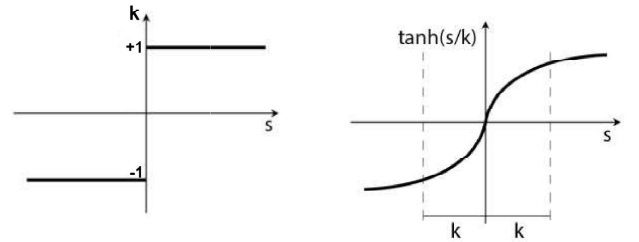
onde o termo  $\text{sgn}(s)$  é uma função descontínua do tipo relé utilizada pela superfície  $S(t)$ , que matematicamente é expressa por:

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} -1, & \text{se } s < 0 \\ 0, & \text{se } s = 0 \\ 1, & \text{se } s > 0 \end{cases} \quad (13)$$

onde  $K$  é ganho na função sinal para o chaveamento exercido sobre a superfície de deslizamento. O ganho  $K$  é definido de modo a garantir a condição de deslizamento sobre a superfície  $S(t)$  e robustez ao sistema. Porém, com a utilização da função sinal, o controle por modo deslizante apresenta o fenômeno conhecido por *chattering* na saída do controlador. Esse fenômeno causa um comportamento indesejado do sistema. O *chattering* é indesejável pois pode causar instabilidade no controle, perda de energia por aquecimento em circuitos elétricos, além de desgaste por vibrações em sistemas mecânicos (UTKIN et al., 2009).

Outra representação para a lei de controle por modo deslizante envolve a adição não de uma função do tipo relé, mais sim de uma função do tipo  $\tanh(s/k)$  que representa uma tangente hiperbólica sobre a superfície de deslizamento. A função  $\tanh(s/k)$  é uma função contínua inserida no controlador com a finalidade de suavizar a curva do esforço de controle imposta na saída do controlador, ao contrário da função sinal que é descontínua. Na figura (3) podemos observar a diferença na estrutura lógica de cada função dentro da lei de controle.

Figura 3. Gráficos das funções utilizadas na lei de controle  $u(t)$ .



(a) Função  $\text{sgn}(s)$ .

(b) Função  $\tanh(s/k)$ .

Fonte: Autoria própria

A figura (3a) mostra que a função  $\text{sgn}(s)$  funciona como um relé, o que causa variações bruscas no esforço de controle a medida que o sistema desliza sobre a superfície de deslizamento, levando assim a *chattering* no sistema. Já a figura (3b) mostra que ao utilizar a função  $\tanh(s/k)$ , há uma suavização em torno na superfície de deslizamento, fazendo com que o *chattering* seja evitado.

Substituindo a função  $\text{sgn}(s)$  pela função  $\tanh(s/k)$  na estrutura do controlador, a lei de controle pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$u(t) = r(\mathbf{x}, t)^{-1} \left[ -f(\mathbf{x}, t) + x_d^{(n)} - \Lambda_u^T \tilde{\mathbf{x}} - J \tanh\left(\frac{s}{k}\right) \right] \quad (14)$$

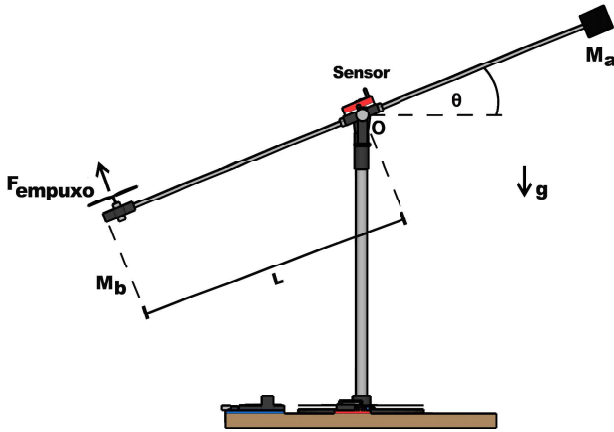
em que  $k$  é uma constante positiva responsável pela suavidade na lei de controle, ou seja,  $k$  é a espessura da função  $\tanh$ , e  $J$  é um ganho para a função  $\tanh(s/k)$ .

As duas equações da lei de controle divergem apenas pelo tipo de sinal exercido na saída do controlador. Mais a frente iremos abordar as características que envolvem cada uma das leis de controle apresentadas até aqui. Gráficamente será possível distinguir a diferença entre cada uma delas.

#### 4. SISTEMA SEESAW PROPELLER

O sistema *Seesaw Propeller* é um sistema dinâmico não linear com grande aplicabilidade na área de engenharia de controle. Esse sistema é bastante didático e prático, trata-se de uma espécie de gangorra em que em uma de suas extremidades acopla-se um motor a reação com a finalidade de controlar a posição da haste do sistema. Na figura (4) podemos observar um esboço do sistema descrito acima:

Figura 4. Desenho esquemático do sistema *Seesaw Propeller*.



Fonte: Autoria própria.

Esse sistema é passível de comparação com os sistemas que utilizam motores a reação, que existem, por exemplo, em helicópteros e drones. O controle de velocidade de motores a reação, com a finalidade de controlar posições de um determinado sistema, é de extrema importância na atualidade. Cada vez mais exige-se sistemas de controle robustos que operem em condições extremas de trabalho, trazendo segurança e confiabilidade nas áreas em que os motores a reação são utilizados.

No trabalho de KIM et al. (2012) também foi feito um estudo de um sistema *Seesaw Propeller*, no qual inicialmente foram feitas simulações em um *software* matemático junto a uma plataforma de simulação. Posteriormente foi feita a implementação do sistema em uma planta física, porém KIM et al. (2012) utilizou um controle de altitude para controlar a posição do seu sistema.

MONTENEGRO (2019) também fez um estudo numérico e experimental do sistema *Seesaw Propeller*. No seu trabalho ele abordou duas técnicas de controle, o controle

linear PID e o controle não linear *Feedback Linearization*. Com esses dois controladores, ele realizou simulações numéricas testando a capacidade de controle das duas técnicas e posteriormente realizou experimentos em uma planta real do sistema. Criou também uma interface gráfica no *software* LabVIEW para realizar os experimentos, onde extraiu os resultados dos controladores sobre o sistema.

O princípio de controle de posição desse sistema, inevitavelmente, pode ser estendido para o controle de posição de um grau de liberdade de um drone. Os drones possuem dinâmica parecida com a do sistema *Seesaw Propeller*, pois tratam-se de sistemas com controle de motores a reação, além disso utilizam sensores e atuadores semelhantes aos considerados no presente trabalho. Mais adiante será abordada a utilização de duas teorias de controle já citadas neste trabalho; um controlador do tipo linear, mais especificamente o controlador PID, e um controlador não linear, o por modo deslizante.

Aplicando a lei de Euler para a rotação, tomando o somatório do momento em relação ao ponto O como base, chegamos em uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem que descreve o comportamento dinâmico do sistema:

$$I_{zz}\ddot{\theta} = (M_a - M_b)gl \cos \theta + F_{empuxo}l \quad (15)$$

onde  $M_a$  e  $M_b$  são as massas consideradas nas extremidades da haste,  $l$  é o comprimento de metade da haste,  $I_{zz}$  é o momento de inércia do sistema,  $\theta$  é o ângulo entre a haste e o referencial do eixo  $x$  e  $F_{empuxo}$  é a força de empuxo ou variável de entrada produzida pelo motor a reação do sistema.

#### 5. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para a aplicação da equação do sistema nas simulações numéricas, foi preciso reduzir a ordem da equação, para duas equações diferenciais de primeira ordem, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \omega = \dot{\theta} \\ \dot{\omega} = \frac{(M_a - M_b)gl}{I_{zz}} \cos \theta + \frac{l}{I_{zz}} F_{empuxo} \end{cases} \quad (16)$$

Para que fossem feitas as simulações numéricas, algumas estimativas dos parâmetros que envolve o sistema *Seesaw Propeller* foram feitas a fim de trazer os resultados mais próximos possíveis da realidade. Na tabela (1) são apresentados os valores experimentais estabelecidos para o sistema *Seesaw Propeller*, a fim de simular a dinâmica do sistema pelas técnicas de controle já discutidas.

Tabela 1. Parâmetros utilizados na simulação do sistema.

| Parâmetro            | Representação | Valor | Unidade          |
|----------------------|---------------|-------|------------------|
| Momento de Inércia   | $I_{zz}$      | 0,21  | kgm <sup>2</sup> |
| Massa A              | $M_a$         | 0,3   | kg               |
| Massa B              | $M_b$         | 0,2   | kg               |
| Comprimento da Haste | $l$           | 0,25  | m                |
| Gravidade            | $g$           | 9,81  | m/s <sup>2</sup> |

Para que fosse possível expressar os resultados quantitativos sobre a utilização do controlador linear PID e do controlador não linear por modo deslizante, foi calculado o erro quadrático médio ( $E_{QM}$ ) do sistema, dado pela seguinte expressão:



$$E_{QM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2 \quad (17)$$

onde  $N$  é o número de pontos correspondente a cada erro e  $e_i$  é o erro de rastreamento em cada ponto da curva. O passo utilizado para o cálculo do erro quadrático médio ( $E_{QM}$ ) foi de 0,01, com a finalidade de obter um maior número de pontos a ser avaliado.

### 5.1 Controle PID Aplicado ao Sistema Seesaw Propeller

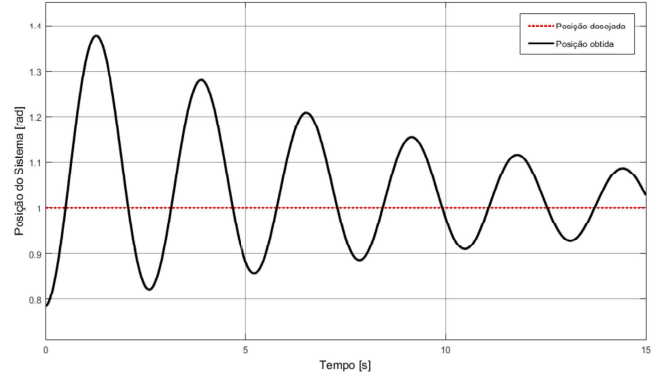
Para a aplicação do controlador PID ao sistema *Seesaw Propeller*, foi utilizando o *software* matemático junto a uma plataforma integrada de simulação por diagramas de blocos. Essa plataforma consiste em um sistema de blocos de fácil manuseio em que ligamos um bloco a outro para que seja feita a comunicação do sinal entre os termos que compõem a equação do sistema. Uma das principais vantagens de utilizar essa plataforma é que a mesma já possui várias funções prontas que comumente são utilizadas em simulações. Um exemplo de uma dessas funções é a função do próprio controlador PID, em que já é dada através de um bloco, precisando apenas das especificações das constantes  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ .

O método inicial usado para a sintonia do controlador PID do sistema foi o método de Ziegler-Nichols. Este método consiste inicialmente em tornar  $K_d = 0$  e  $K_i = \infty$ . A partir disso, variamos o parâmetro proporcional do controlador  $K_p$  até um valor crítico ( $K_{cr}$ ) no qual é possível obter uma resposta oscilatória a uma entrada do tipo degrau. Com esse valor de  $K_p$  conhecido, OGATA (2010) sugere a utilização de uma tabela na qual podem ser estimados os valores de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  para a técnica de sintonia de Ziegler-Nichols. Com a utilização da tabela, as estimativas dos valores dos parâmetros do controlador PID são definidas como: o valor do parâmetro proporcional é obtido fazendo  $K_p = 0,6K_{cr}$ , já os valores de  $K_i$  e  $K_d$  são determinados respectivamente por  $K_i = 0,5P_{cr}$  e  $K_d = 0,125P_{cr}$ , onde  $P_{cr}$  é o período de oscilação da resposta do sistema utilizando o valor crítico do parâmetro proporcional  $K_p$ . O valor encontrado do período e do parâmetro proporcional crítico foram, respectivamente,  $P_{cr} = 1,5$  e  $K_{cr} = 6,60$ . Com esses valores, os parâmetros do controlador PID foram estimados em:  $K_p = 3,96$ ,  $K_d = 0,1875$  e  $K_i = 0,75$ . As condições iniciais utilizadas para o ângulo do sistema e sua velocidade angular foram, respectivamente,  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\omega_0 = 0$ , além disso, não foi adicionado ao sistema nenhum tipo de perturbação externa.

Com a utilização desse método de sintonia, a resposta obtida para uma posição desejada,  $\theta_d$ , do tipo constante (*cte*) e do tipo  $\sin(t)$ , não foi satisfatória. O controlador PID não conseguiu estabilizar o sistema em torno da posição desejada e apresentou uma oscilação não desejada na qual compromete o seu desempenho. Nas figuras (5) e (6) podemos observar o comportamento do sistema com os valores dos parâmetros obtidos através da técnica de sintonia de Ziegler-Nichols.

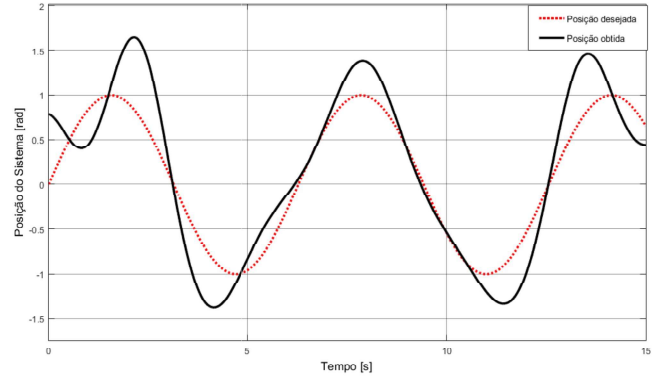
Visivelmente, os parâmetros do controlador estimados através do método de sintonia de Ziegler-Nichols não reproduziram um comportamento satisfatório do sistema sobre uma posição  $\theta_d$  do tipo constante e do tipo  $\sin(t)$ . As curvas de cor preta indicam o comportamento do sistema

Figura 5. Reposta do sistema a uma referência do tipo constante com a utilização da técnica de sintonia de Ziegler-Nichols.



Fonte: Autoria própria.

Figura 6. Reposta do sistema a uma referência do tipo  $\sin(t)$  com a utilização da técnica de sintonia de Ziegler-Nichols.



Fonte: Autoria própria.

sobre as trajetórias estabelecidas, além disso, com esses parâmetros no controlador PID, o erro quadrático médio para  $\theta_d = cte$  e  $\theta_d = \sin(t)$ , foram de:

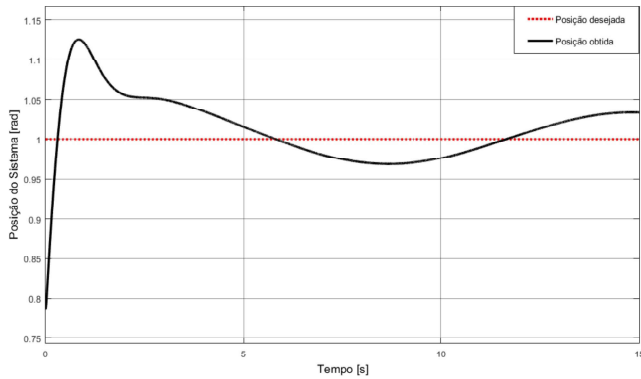
$$\begin{cases} E_{QM} = 3,26 & \text{para } \theta_d = cte \\ E_{QM} = 12,83 & \text{para } \theta_d = \sin(t) \end{cases}$$

A fim de melhorar a performance do controlador PID, reduzindo o erro quadrático médio ( $E_{QM}$ ), utilizamos outro método de sintonia, o método de tentativa e erro. Para a utilização desse método, fazemos primeiro  $K_i = 0$  e  $K_d = 0$ , e variamos apenas o parâmetro proporcional  $K_p$  até um valor satisfatório em relação ao erro, o que nos proporcionou um valor de  $K_p = 7,5$ . Fixado o valor do parâmetro proporcional, variamos então o parâmetro derivativo do controlador  $K_d$  até notar uma boa resposta do sistema na variação do erro. Com isso, foi obtido um valor de  $K_d = 3,2$ . Finalmente, foi ajustado o parâmetro integral do controlador  $K_i$  até que o sistema apresentasse um tempo de acomodação satisfatório. O valor obtido para esse parâmetro foi de  $K_i = 2,7$ . Com esses valores estimados através do método de tentativa e erro, simulamos o sistema novamente, repetindo as mesmas condições iniciais  $\theta_0 = \pi/4$  e  $\omega_0 = 0$ , porém, agora adicionamos ao sistema uma perturbação externa não prevista antes da sintonia do controlador PID. A perturbação utilizada foi na forma de

um momento  $P = 0,3\text{sen}(0,5t)$ , atuando na extremidade da haste de forma direta ao sistema.

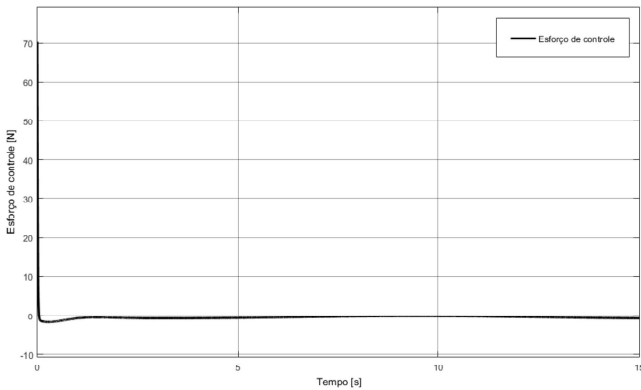
Com a utilização desses novos parâmetros para o controlador PID, a resposta do sistema, o esforço de controle, o erro de rastreamento e o plano de fase do erro para uma posição  $\theta_d = 1$ , são mostrados nas figuras (7), (8), (9) e (10).

Figura 7. Reposta do sistema a uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



Fonte: Autoria própria.

Figura 8. Esforço de controle do controlador PID a uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



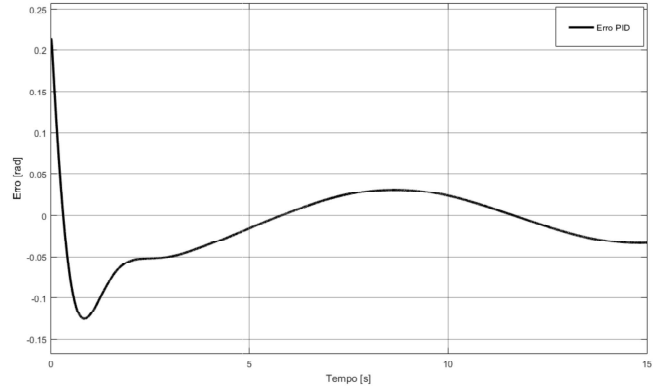
Fonte: Autoria própria.

A figura (7) mostra o resultado da simulação do sistema utilizando o controlador PID com os valores dos parâmetros do controlador estimados a partir do método de tentativa e erro. Utilizando esses parâmetros houve uma redução bastante significativa no valor do erro quadrático médio, o novo valor encontrado do erro foi de  $E_{QM} = 1,19$ .

Na figura (8) temos o esforço de controle feito pelo controlador PID. Nesse gráfico é possível observar que em um curto período de tempo existe um pico no esforço de controle com um valor absoluto de aproximadamente 70 N. Tal fato ocorre devido a condição inicial do sistema ter valor distante da referência estabelecida, logo o controlador PID envia um sinal de esforço elevado, tentando assim estabilizar o sistema.

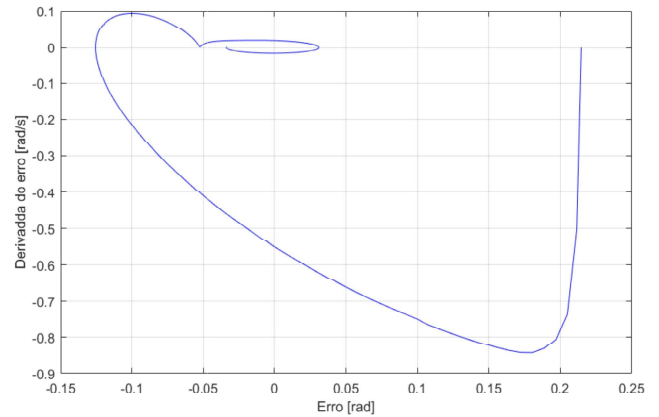
Já na figura (9) é possível acompanhar a evolução do erro de rastreamento em função do tempo. No geral,

Figura 9. Erro do sistema utilizando o controlador PID a uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



Fonte: Autoria própria.

Figura 10. Plano de fase do erro do controlador PID a uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



Fonte: Autoria própria.

o erro se manteve com valores pequenos, uma vez que o controlador PID conseguiu entregar uma trajetória satisfatória mesmo tendo uma perturbação externa no sistema. A redução do erro quadrático médio em relação a técnica de sintonia de Ziegler-Nichols foi de pouco mais de 2,5 vezes.

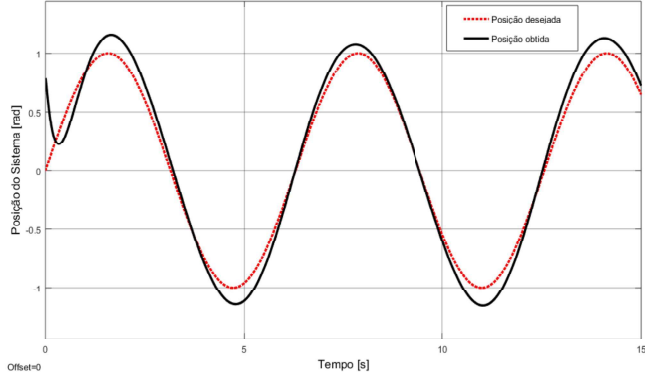
Por fim, na figura (10) é possível observar o plano de fase do erro encontrado no controlador PID para uma posição  $\theta_d = cte$ . Esse plano de fase mostra que a trajetória do erro do sistema fica na vizinhança do ponto  $e = 0$  e  $\dot{e} = 0$ .

Também foi avaliado o desempenho do controlador PID sobre uma trajetória na forma de  $\theta_d = \text{sen}(t)$ . Para essa trajetória usamos os mesmos valores de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  estabelecidos através do método de tentativa e erro. Assim como na simulação com uma trajetória constante, o controlador PID mostrou um bom desempenho sobre o sistema. Vale ressaltar que o sistema *Seesaw Propeller* é de natureza não linear, como já havia sido discutido anteriormente, contudo, apesar desse fato, o controlador PID conseguiu entregar bons resultados nas simulações.

As figuras (11), (12), (13) e (14) mostram o desempenho do controlador PID para uma trajetória oscilatória

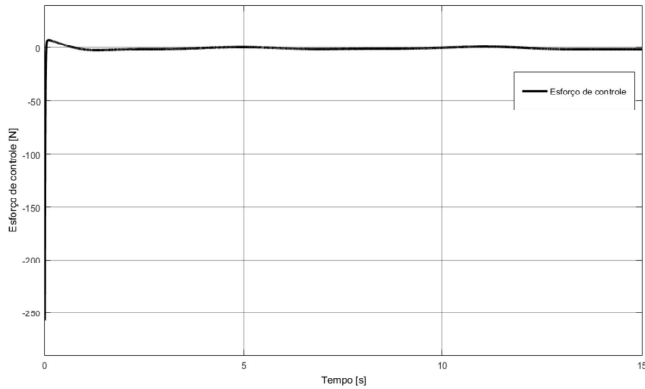
do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  sobre o sistema. Para essa simulação foi utilizado a mesma perturbação externa na forma de  $P = 0,3\sin(0,5t)$  utilizada nas simulações anteriores.

Figura 11. Reposta do sistema a uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



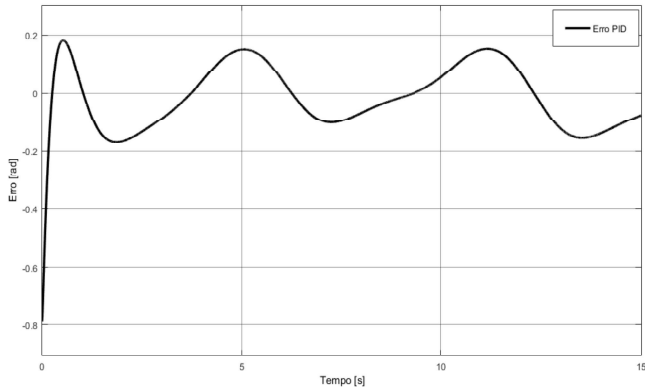
Fonte: Autoria própria.

Figura 12. Esforço de controle do controlador PID a uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



Fonte: Autoria própria.

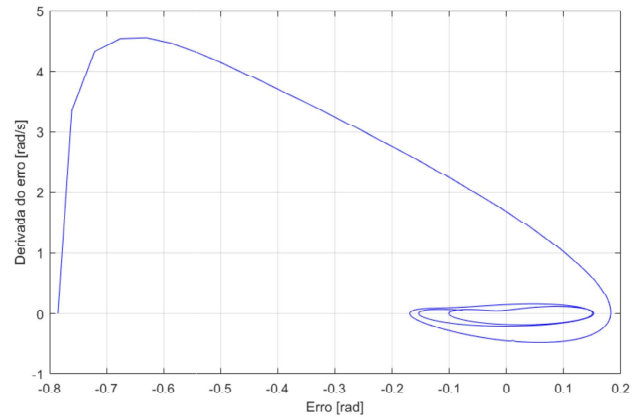
Figura 13. Erro de estabilização do sistema utilizando o controlador PID a uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



Fonte: Autoria própria.

Na figura (11) encontramos a trajetória oscilatória entregue pelo controlador PID. É nítido a diferença do

Figura 14. Plano de fase do erro do controlador PID a uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da técnica de sintonia tentativa e erro.



Fonte: Autoria própria.

desempenho do controlador se comparado com a trajetória encontrada com a técnica de sintonia de Ziegler-Nichols. Como os parâmetros do controlador tiveram valores maiores do que aqueles estabelecidos pela técnica de Ziegler-Nichols, aumentou também a capacidade de controle sobre o sistema, porém existem ressalvas a serem feitas sobre a que custo o controlador PID teve um bom desempenho durante a simulação. O erro quadrático médio obtido para essa trajetória também sofreu uma significativa redução comparado ao erro anterior, o valor do erro encontrado foi de  $E_{QM} = 2,98$  valor um pouco maior que o erro encontrado para uma trajetória constante.

Na figura (12) novamente vemos um pico no esforço de controle feito pelo controlador PID no início da simulação. O pico alcançado do esforço de controle teve um valor absoluto de aproximadamente 255 N. Assim como para uma trajetória constante, o controlador PID precisou de um esforço de controle bastante elevado em um curto período de tempo, devido a condição inicial do sistema está distante da referência, então o controlador envia um sinal de esforço muito elevado para estabilizar o sistema em um curto intervalo de tempo.

A figura (13) fornece o comportamento do erro de rastreamento do sistema com o controlador PID ao longo do tempo. É possível observar que o erro se manteve controlado em uma pequena faixa de valor 0,2 rad. Essa informação também é compatível com o erro quadrático médio encontrado para a referência  $\theta_d = \sin(t)$ .

Assim como no plano de fase encontrado no erro de rastreamento para uma referência  $\theta_d = cte$ , a figura (14) mostra um comportamento semelhante com a referência  $\theta_d = \sin(t)$ . Por outro lado, o plano de fase encontrado na figura (14) mostra uma oscilação maior em torno do ponto  $e = 0$  e  $\dot{e} = 0$ , isso acontece devido a natureza oscilatória da referência, estabelecida na simulação. É possível notar que o plano de fase do erro de rastreamento avança lentamente para uma tentativa de convergência em torno do ponto  $e = 0$  e  $\dot{e} = 0$ , que corresponde ao erro e à derivada do erro de rastreamento.



## 5.2 Controle por Modo Deslizante Aplicado ao Sistema Seesaw Propeller

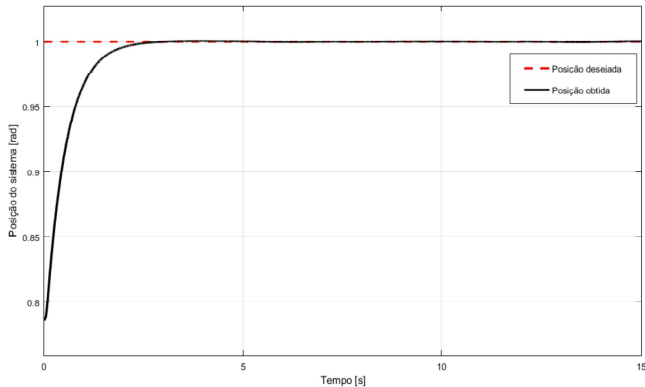
Uma vez já simulado o comportamento do sistema utilizando uma técnica de controle linear, agora utilizaremos uma técnica de controle não linear. O controlador por modo deslizante entrega uma robustez maior que o controlador PID em sistemas não lineares, sendo capaz de trabalhar com diversos tipos de não linearidades, apresentando um bom desempenho sobre o sistema.

Para a simulação do controlador por modo deslizante com a função sinal, utilizamos os parâmetros estabelecidos na tabela (1) para o sistema *Seesaw Propeller*. Foi utilizado também o mesmo tipo de perturbação externa das simulações com o controlador PID. A lei de controle utilizada no *software* matemático junto a plataforma de simulação foi a equação (12), porém adaptada para um sistema de segunda ordem. Como já foi estabelecido por meio da equação (14) a dinâmica do sistema, substituímos o termo  $f(\mathbf{x}, t)$  pela equação (14), isolando o termo  $\ddot{\theta}$  e definindo o ganho da ação de controle como  $r = l/I_{zz}$ . Com isso, a lei de controle do sistema utilizando a função sinal ficou da seguinte forma:

$$u(t) = \frac{1}{r} \left[ -\frac{(M_a - M_b)gl}{I_{zz}} \cos \theta - \lambda \dot{\theta} - K \text{sgn}(s) + \ddot{\theta}_d \right] \quad (18)$$

Nas simulações, atribuímos os valores de  $\lambda = 2$ ,  $K = 4$  e  $r = 0,6/0,7$ . Usando esses valores para os parâmetros do controlador por modo deslizante, foi feita a simulação no Simulink para obtenção dos resultados. As figuras (15), (16), (17) e (18) mostram a performance do controlador por modo deslizante sobre sistema para uma trajetória do tipo  $\theta_d = 1$  rad.

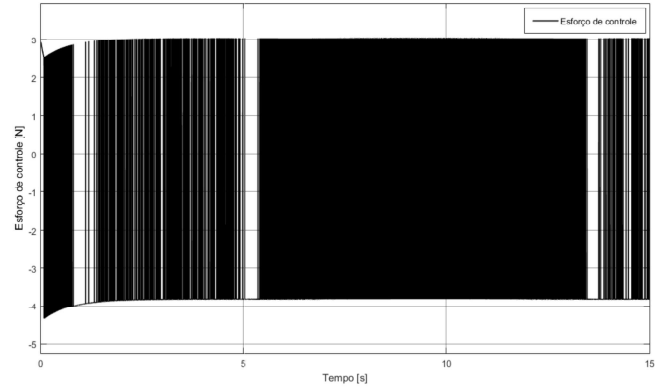
Figura 15. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

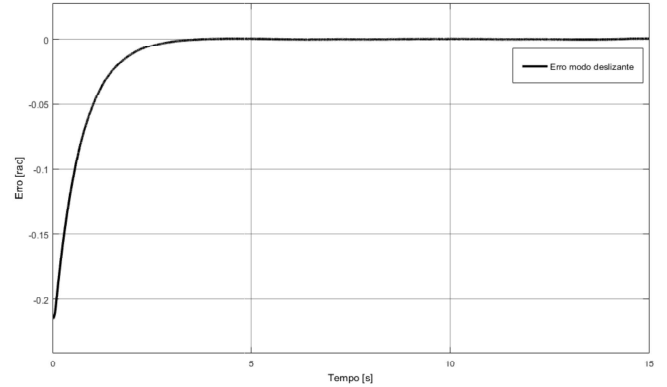
A figura (15) mostra o comportamento do sistema entregue pelo controle por modo deslizante sobre uma referência constante. É possível observar que em pouco menos de 5 s o controlador conseguiu estabilizar o sistema, e mesmo com a ação da perturbação, o controle se manteve quase que sobre a referência estabelecida, ou seja, o controle por modo deslizante conseguiu compensar a ação dessa perturbação. Já na figura (7), o controlador PID

Figura 16. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função sinal.



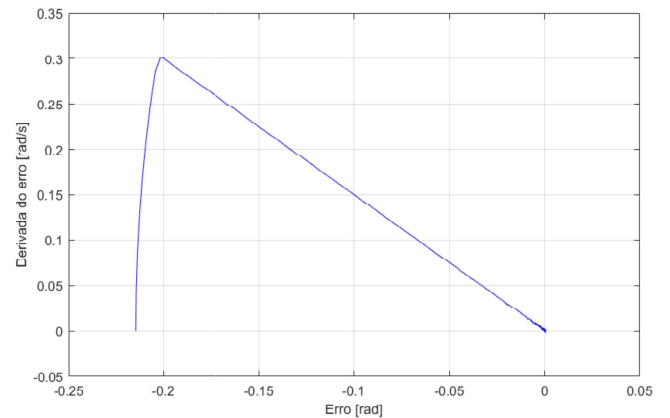
Fonte: Autoria própria.

Figura 17. Erro de estabilização do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

Figura 18. Plano de fase do erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

exibiu pequenas oscilações em torno da trajetória desejada muito por conta da perturbação imposta ao sistema. Diante do comportamento do sistema exibido na figura (15), o erro quadrático médio do controlador por modo deslizante

sobre essa trajetória foi de  $E_{QM} = 0,12$ . Esse valor está muito abaixo do valor encontrado com o controlador PID. Isso se dá pela capacidade do controlador por modo deslizante lidar com as não lineares e perturbações externas presentes no sistema.

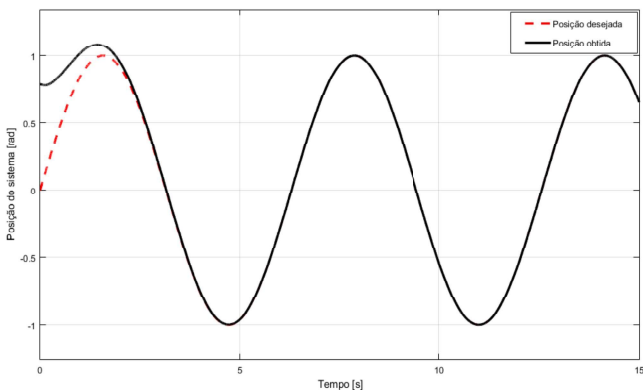
Na figura (16) vemos claramente o fenômeno conhecido por *chattering* causado pela descontinuidade da função sinal. Essa descontinuidade causa um chaveamento excessivo na saída do controlador, o que acarreta em um esforço de controle com mudança abrupta no sentido do sinal imposto ao sistema. Com esse comportamento, há uma dificuldade, por exemplo, na implementação do controle por modo deslizante em sistemas mecânicos, pois fatalmente causaria vibrações indesejadas sobre o sistema.

A figura (17) mostra o erro de rastreamento do sistema com o controlador por modo deslizante. Como se pode observar, o controlador inicialmente apresentou uma variação maior nos valores do erro de rastreamento, porém mostrou uma diminuição bem significativa em um tempo inferior à 5s e, após esse tempo, a curva se manteve constante. Isso mostra a robustez do controlador por modo deslizante, o qual foi capaz de estabilizar o sistema, mesmo estando sujeito a uma perturbação externa, com um pequeno erro associado.

Na figura (18) o plano de fase do erro de rastreamento do sistema mostra um comportamento semelhante ao da figura (2). Esse comportamento mostra a aproximação do sistema para a superfície de deslizamento com o seu posterior deslizamento até o ponto  $\hat{x} = 0$  e  $\dot{\hat{x}} = 0$ .

Também foi simulado o controle por modo deslizante com a função sinal para a trajetória oscilatória do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ , os gráficos que mostram o desempenho do controlador sobre o sistema são apresentados nas figuras (19), (20), (21) e (22). Em relação à equação (18), a única mudança foi o termo  $\ddot{\theta}_d$ . Os parâmetros estabelecidos para o controlador se mantiveram os mesmos da simulação anterior.

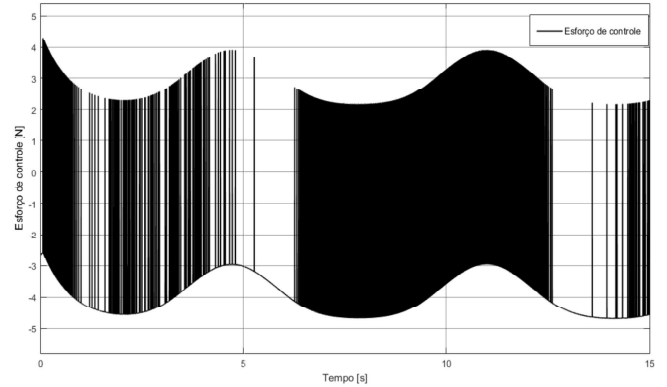
Figura 19. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

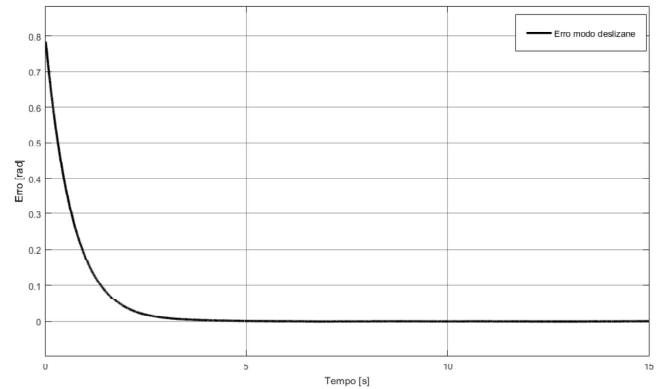
A partir da figura (19), é possível notar que o controlador por modo deslizante obteve um bom desempenho. Passado o tempo de acomodação, nota-se que o sistema se manteve sobre a referência ao longo de todo o tempo de

Figura 20. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



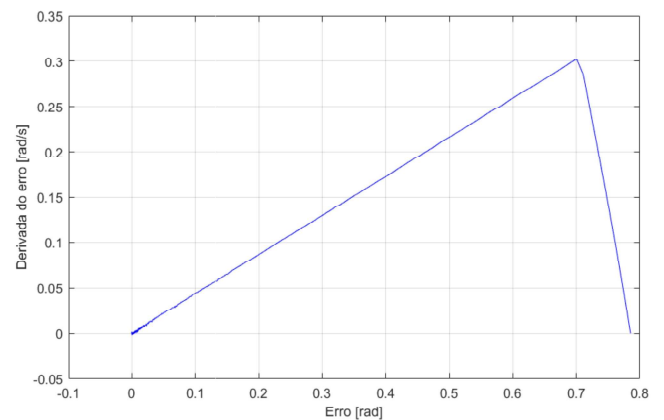
Fonte: Autoria própria.

Figura 21. Erro de estabilização do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

Figura 22. Plano de fase do erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

simulação. O valor do erro quadrático médio sobre essa trajetória foi inferior àquele encontrado com o controlador PID, o valor do erro com o controlador por modo deslizante foi de  $E_{QM} = 1,41$ . Com isso, é possível observar

que a performance entregue pelo controlador por modo deslizante nas duas trajetórias utilizadas foram melhores que os resultados obtidos com o controlador PID. Ainda é possível afirmar que esse percentual de erro é quase que estabelecido apenas pelo início da trajetória.

A figura (20) retrata mais uma vez o fenômeno *chattering* na saída do controlador por modo deslizante. Diante disso, pode-se notar que este fenômeno não depende da trajetória a ser seguida, mais sim do tipo de função escolhida na lei de controle para estabilizar o sistema na superfície de deslizamento.

A curva do erro apresentada na figura (21) para  $\theta_d = \sin(t)$  também mostrou um tempo de acomodação curto, o que ressalta novamente o alto desempenho entregue pelo controle por modo deslizante sobre o sistema não linear. Comparando a figura (21) com a figura (13), vemos que o erro de rastreamento do controle por modo deslizante se mostrou melhor. Passado o tempo de acomodação, a curva de erro da figura (21) se mantém constante, já na figura (13) a curva de erro apresenta pequenas variações em torno de zero.

A figura (22) apresenta o plano de fase do erro de rastreamento para a trajetória oscilatória. Mesmo a trajetória sendo oscilatória, o plano de fase do erro de rastreamento apresenta uma convergência em torno do ponto  $\tilde{x} = 0$  e  $\dot{\tilde{x}} = 0$ , assim como visto anteriormente para uma trajetória constante (figura (18)). Diferentemente da figura (14), na qual o plano de fase não convergiu para o ponto  $e = 0$  e  $\dot{e} = 0$ , o plano de fase do erro apresentado na figura (22) obtém resultado bem melhor.

Uma vez feita as simulações das duas trajetórias com a utilização da função sinal pelo controlador por modo deslizante, foi simulado também o comportamento do sistema utilizando uma função contínua de  $s$  na forma de  $\tanh$ . Para essa simulação, utilizamos a equação (14), acrescentando os valores dos parâmetros do sistema e das trajetórias. A lei de controle com a função  $\tanh$  é descrita por:

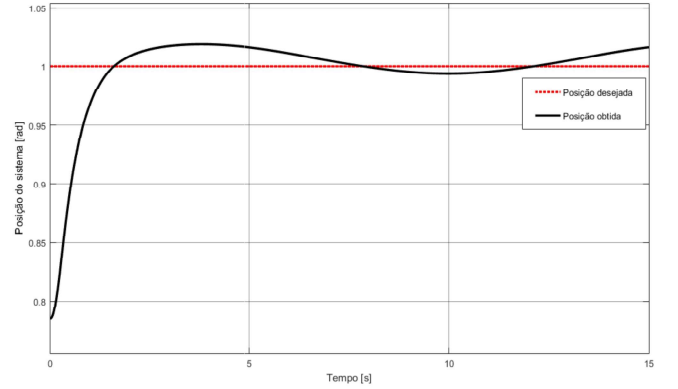
$$u(t) = \frac{1}{r} \left[ -\frac{(M_a - M_b)gl}{I_{zz}} \cos \theta - \lambda \dot{\theta} - J \tanh\left(\frac{s}{k}\right) + \ddot{\theta}_d \right] \quad (19)$$

Os valores de  $g$  e  $\lambda$  se mantiveram os mesmos das simulações anteriores, já o valores atribuídos para  $k$  e  $J$  foram, respectivamente, 0,1 e 1,4.

As figuras (23), (24), (25) e (26) mostram o desempenho do controlador por modo deslizante utilizando uma função contínua de  $s$  na forma de  $\tanh(s/k)$ .

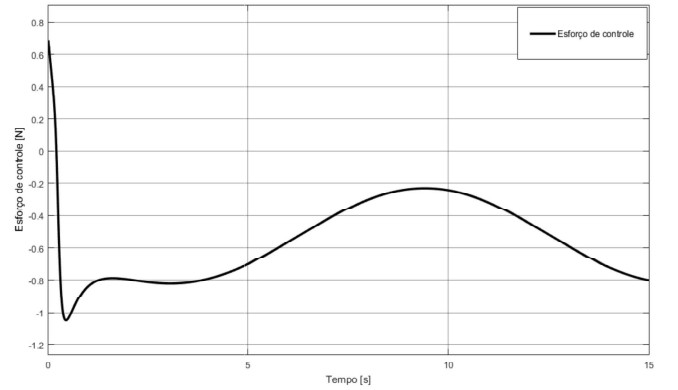
Com a utilização da função contínua  $\tanh$  na lei de controle por modo deslizante, é possível observar que a curva da trajetória do sistema mostrada na figura (23) é semelhante a curva da figura (15). Ambas as curvas exibem respostas muito próximas ao valor unitário da referência. O cálculo do erro quadrático médio para a curva da figura (23) mostrou um pequeno aumento percentual em relação ao erro quadrático médio da figura (15). O valor do erro encontrado com a utilização da função  $\tanh$  foi de  $E_{QM} = 0,12$  que por sua vez também é bastante inferior ao erro encontrado com o controlador PID. Isso comprova

Figura 23. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função  $\tanh$ .



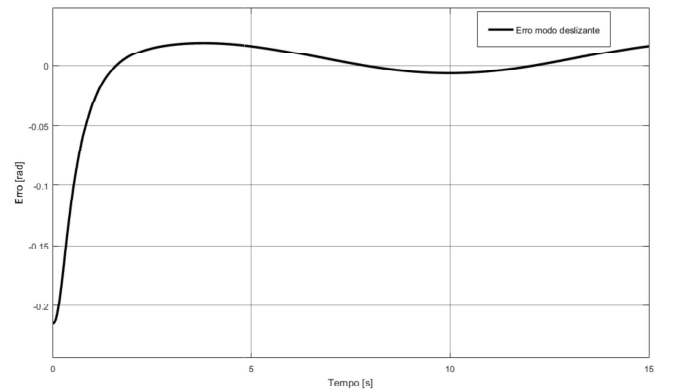
Fonte: Autoria própria.

Figura 24. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função  $\tanh$ .



Fonte: Autoria própria.

Figura 25. Erro de estabilização do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função  $\tanh$ .



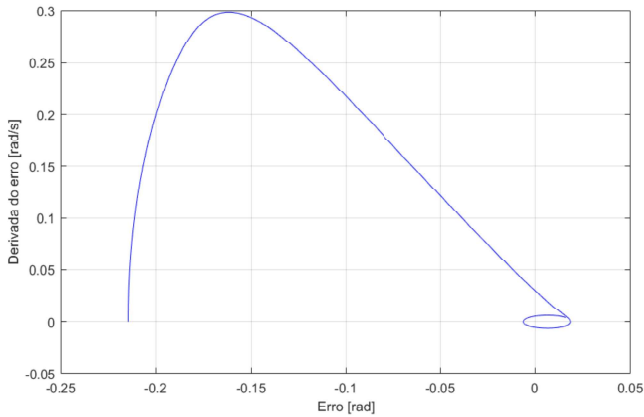
Fonte: Autoria própria.

mais uma vez que o controle por modo deslizante é capaz de oferecer resultados melhores do que o controle PID.

Na figura (24) temos o esforço de controle feito na saída do controlador por modo deslizante utilizando a função contínua  $\tanh$ . Diferentemente do esforço de controle com a utilização da função sinal, aqui não temos a



Figura 26. Plano de fase do erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = cte$  com a utilização da função tanh.



Fonte: Autoria própria.

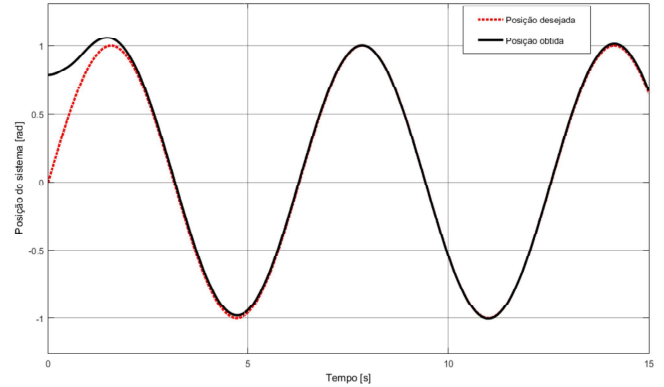
presença do fenômeno *chattering* na saída do controlador. A não presença do *chattering* se dá pela natureza contínua da função tanh, e isso faz com que o deslizamento sobre a superfície  $S(t)$  se dê com mudanças suaves na lei de controle. Esse tipo de função é bastante atrativa, uma vez que permite que esse controlador seja utilizado em um número maior de sistemas reais, sejam eles mecânicos ou não.

O erro de rastreamento mostrado na figura (25) exibe um comportamento inicial semelhante ao do erro mostrado na figura (17) com a função sinal. Vale ressaltar que após o tempo de acomodação, a figura (17) mostra um valor constante do erro, já a figura (25) mostra uma pequena variação do erro em torno de zero. A diferença entre as curvas acontece devido a suavização do esforço de controle promovida pela função tanh, no qual o rastreamento passa a ser de precisão garantida, em vez de perfeito, como ocorre com a utilização da função sgn. Como era esperado, a curva da figura (25) apresentou o erro quadrático médio um pouco maior.

A figura (26) mostra o plano de fase do erro de rastreamento ao longo da simulação com a utilização da função tanh na lei de controle. Assim como no plano de fase da figura (18), o gráfico mostra a aproximação e em seguida o deslizamento sobre a superfície de  $s$ . Porém, diferentemente da figura (18), a figura (26) mostra que o plano de fase não consegue estabilizar o sistema em torno do ponto  $\ddot{x} = 0$  e  $\dot{x} = 0$ . Com a utilização da função tanh, há uma pequena perda na precisão do rastreamento da trajetória. Essa perda de precisão é diretamente proporcional ao parâmetro de suavização  $k$  da função  $\tanh(s/k)$ . Quanto menor  $k$ , mais a função  $\tanh(s/k)$  se aproxima da função  $\text{sgn}(s)$  e maior é a precisão do rastreamento.

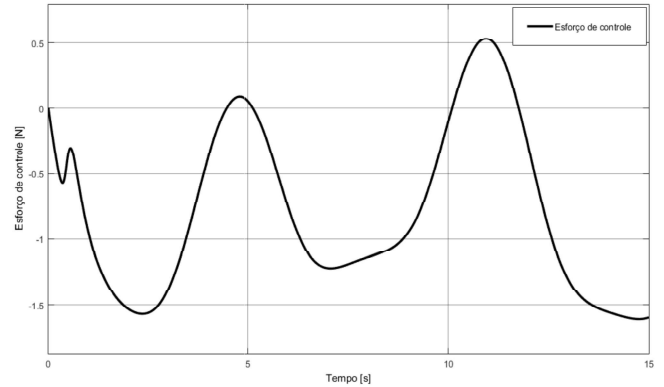
Para as simulações do sistema com a função tanh na lei de controle utilizando uma trajetória do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ , os resultados encontrados se mostraram tão bons quanto os resultados entregue para esta mesma trajetória com a função sinal na lei de controle. As figuras (27), (28), (29) e (30) retratam o desempenho do controlador sobre o sistema.

Figura 27. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função tanh.



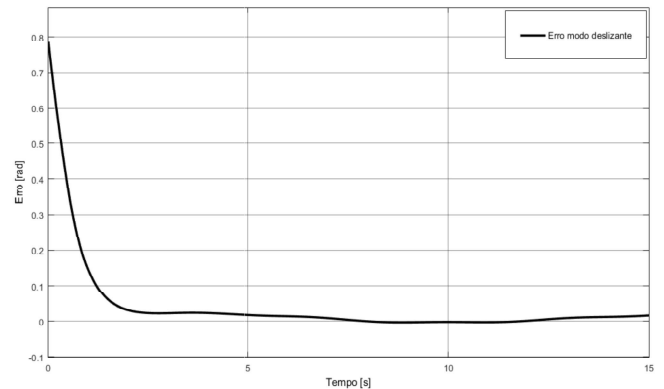
Fonte: Autoria própria.

Figura 28. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função tanh.



Fonte: Autoria própria.

Figura 29. Erro de estabilização do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função tanh.

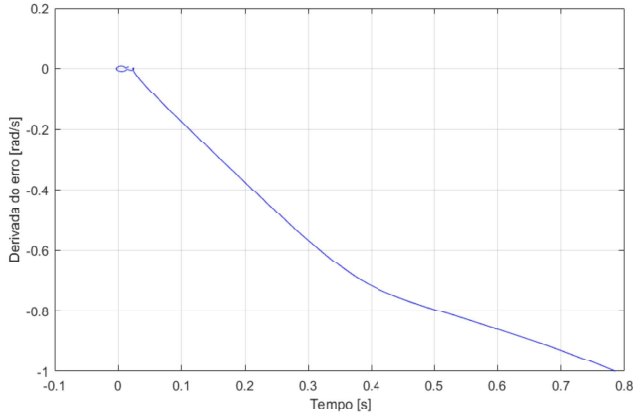


Fonte: Autoria própria.

Na figura (27) vemos um resultado praticamente igual ao mostrado na figura (19). O comportamento do sistema para a trajetória oscilatória após um curto período de acomodação se mostrou praticamente perfeito ao longo do tempo, mais uma vez, o resultado mostra a robustez do controle não linear por modo deslizante. O erro quadrático



Figura 30. Plano de fase do erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a função  $\tanh$ .



Fonte: Autoria própria.

médio encontrado para essa simulação foi um pouco maior em relação ao erro encontrado com a função sinal e menor que o encontrado com o controle PID. O valor do erro quadrático médio foi de  $E_{QM} = 1,44$ . Isso mostra um desempenho um pouco inferior com a utilização da função  $\tanh$  em relação ao desempenho com a função sinal, em contrapartida, o *chattering* desaparece do sistema.

A figura (28) mostra o esforço de controle na saída do controlador com a utilização da função  $\tanh$ . Claramente vemos que o fenômeno de *chattering* foi completamente eliminado, assim como aconteceu na trajetória constante. Apesar da mudança na função de  $s$ , o resultado se manteve próximo, ou seja, mesmo com suavização, o sistema apresenta uma boa performance. Esse resultado viabiliza a utilização da função contínua dentro da lei de controle para sistemas físicos reais, proporcionando a implementação do controle por modo deslizante em muitos sistemas, principalmente àqueles que possuem atuadores ligeiramente lentos, bem como em sistemas mecânicos com restrição a vibrações.

A curva do erro representada na figura (29) mostra um rápido decaimento do valor inicial para um valor praticamente nulo ao longo da simulação, esse rápido decaimento representa o bom desempenho do controle por modo deslizante utilizando a função  $\tanh$ . Essa curva é bastante semelhante a curva mostrada na figura (21), na qual o controlador foi implementado utilizando a função sinal.

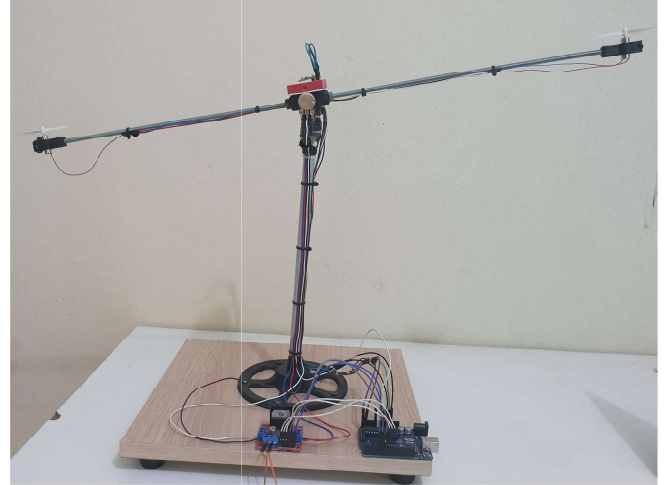
A figura (30) mostra o plano de fase do erro de rastreamento para a trajetória  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função  $\tanh$  no controlador. O gráfico tem um comportamento um pouco diferente do apresentado na figura (22), tendo em vista a suavização do esforço de controle proporcionado pela função  $\tanh$ . Tanto a figura (30) quanto a figura (22) mostram uma convergência para um ponto próximo a  $\tilde{x} = 0$  e  $\dot{\tilde{x}} = 0$ .

## 6. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O sistema não linear *Seesaw Propeller* foi adaptado a um protótipo físico com a finalidade de realizar experimentos utilizando o controlador linear PID e o controlador não linear por modo deslizante. O experimento foi realizado com a intenção de comparar os resultados encontrados nas simulações numéricas com os resultados reais encontrados através de experimentos de um sistema físico equivalente, além de testar na prática as teorias de controle linear e não linear.

Na figura (31) vemos o sistema físico *Seesaw Propeller* construído para os testes experimentais. O sistema físico apresenta uma mudança em relação ao modelo teórico proposto nas simulações numéricas. A fim de aumentar a precisão do rastreamento das trajetórias, adicionamos a cada extremidade da haste um motor responsável por reproduzir o sinal de saída do controle sobre o sistema, diferentemente do modelo teórico, onde apenas uma das extremidades tinha a ação do atuador.

Figura 31. Sistema físico *Seesaw Propeller* construído para os experimentos.



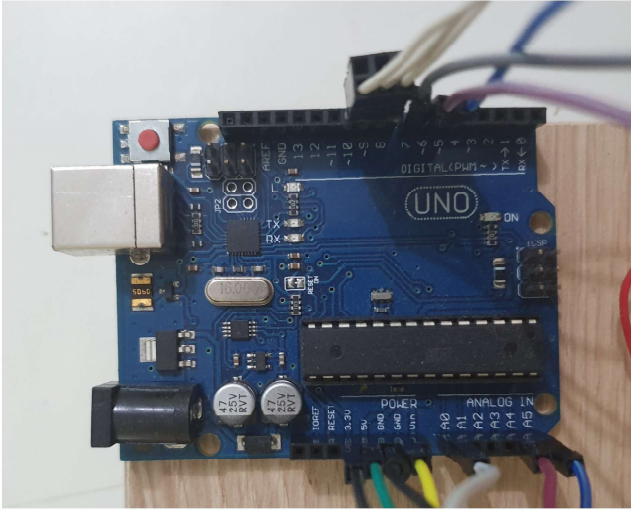
Fonte: Autoria própria.

Para a utilização do sistema físico mostrado na figura (31), alguns componentes foram adicionados para que fosse possível o seu funcionamento. Nas figuras a seguir, serão mostrados cada componente do sistema, além de sua respectiva função nos experimentos.

A plataforma de prototipagem Arduino UNO mostrada na figura (32) foi utilizada para a implementação do código do controlador PID e também do controlador por modo deslizante. A placa de Arduino UNO possui um microcontrolador bastante versátil, mostrando compatibilidade com uma infinidade de componentes eletrônicos usados para os mais variados fins e também apresenta compatibilidade com os principais *softwares* usados na engenharia. Para os experimentos do sistema *Seesaw Propeller*, a placa de Arduino UNO foi conectada a um sensor e também a uma placa de distribuição de alimentação para os atuadores (motores).

A figura (33) mostra o sensor utilizado para as leituras do sinal de saída do sistema (ângulo). Trata-se de um sensor do tipo giroscópio/acelerômetro MPU 6050,

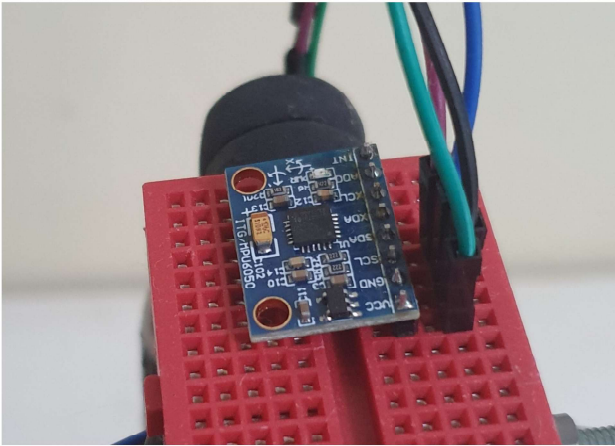
Figura 32. Plataforma de prototipagem Arduino UNO utilizada no sistema físico *Seesaw Propeller* para os experimentos.



Fonte: Autoria própria.

o qual é capaz de medir de forma indireta o ângulo de inclinação dos três eixos através da aceleração detectada pela mudança de sua posição, combinado também com a medida de sua velocidade angular. O sensor MPU 6050 foi posicionado no centro da haste que liga os dois motores e o eixo utilizado para as medidas da variável do sistema foi o eixo  $x$ .

Figura 33. Sensor MPU 6050 utilizado no sistema físico *Seesaw Propeller* para alimentar o controlador com os dados de saída.



Fonte: Autoria própria.

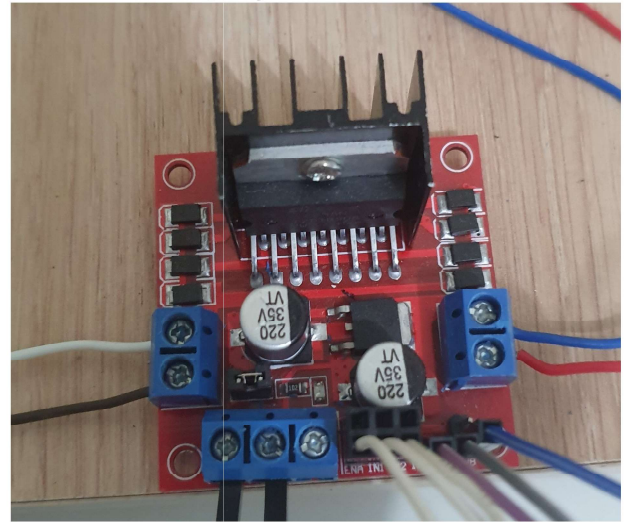
A figura (34) mostra a ponte H utilizada no sistema. Trata-se de uma placa de distribuição de alimentação que possui a função de inverter a polaridade no sinal de saída para os pinos conectados aos motores. Essa função de inversão é indispensável para o funcionamento do sistema físico *Seesaw Propeller*. Como se trata de um sistema dinâmico no qual os motores necessariamente precisam compensar qualquer tipo de perturbação externa, o sentido do giro dos motores não pode ser fixado como único. A conectividade com o Arduino pode ser feita através de qualquer pino que possua uma saída do tipo *Pulse Width Modulation* (PWM) que possui uma faixa de 0 a

255, na qual simula uma tensão estática variável de 0 a 5 V. Essa conexão é usada para que o Arduino consiga mudar a intensidade do sinal para a ponte H, fazendo com que a alimentação dos motores seja variável, trazendo um controle para o sinal de saída do controlador. Então, o esforço de controle tem como sinal de saída o PWM. Para que o esforço de controle possa ser convertido em valores de tensão, a equação a seguir mostra a relação do PWM com a tensão de saída do pino do Arduino para a ponte H.

$$u_v = \frac{5}{255} \text{PWM} \quad (20)$$

A equação (20) mostra a relação dos valores de PWM convertidos em valores de tensão, onde  $u_v$  é o esforço de controle em tensão que a ponte H recebe como sinal de entrada.

Figura 34. Placa ponte H utilizada no sistema físico *Seesaw Propeller* para alimentar os motores usados no controle de posição do sistema.



Fonte: Autoria própria.

Na figura (35) vemos o motor utilizado no sistema físico durante os experimentos. Trata-se de um motor DC muito utilizado em drones de pequeno porte. O motor desempenhou um bom resultado na atuação sobre o sistema, possibilitando um bom desempenho e trazendo ótima resposta a perturbações externas causadas no sistema durante os experimentos. Além disso, o motor mostrou uma enorme capacidade de rotação, podendo produzir um alto empuxo sobre o sistema.

A figura (36) mostra o esquema de ligações para os componentes eletrônicos do sistema. O sensor MPU 6050 foi ligado nos pinos A5 e A4 do Arduino, para fornecer os dados do giroscópio e do acelerômetro, respectivamente. Já a ponte H, teve seus pinos de entrada de sinal PWM ligados as saídas D7 e D9 do Arduino. Além disso, as saídas D6 e D8 foram responsáveis por dizer qual saída da ponte H para o motor teria inicialmente sinal positivo. A alimentação da ponte H foi de forma externa, através de uma fonte de tensão e de corrente. A ligação dos motores a ponte H foram feitas através das saídas da placa. Essas saídas possuem a característica de mudar o sinal positivo e negativo nos seus terminais.

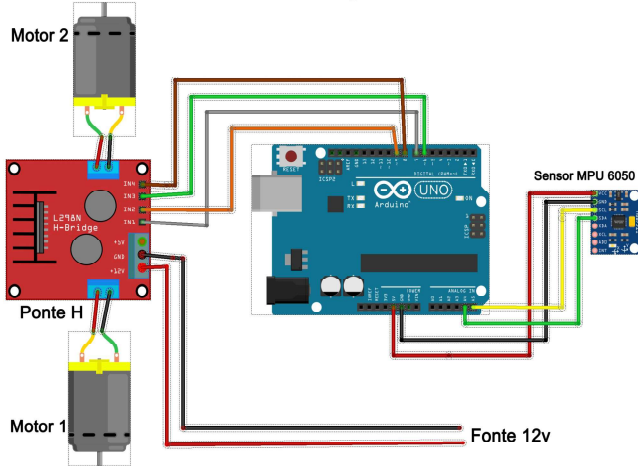


Figura 35. Motor utilizado no sistema *Seesaw Propeller* para reproduzir o sinal de saída do controlador sobre o sistema.



Fonte: Autoria própria.

Figura 36. Esquema de ligações dos componentes eletrônicos do sistema *Seesaw Propeller*.



Fonte: Autoria própria.

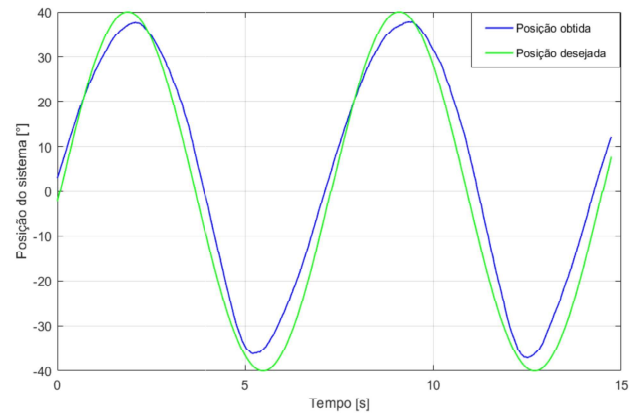
### 6.1 Análise Experimental do Controle por Modo Deslizante

Para realizar os experimentos com a planta do sistema *Seesaw Propeller*, a aquisição dos dados foi feita através do *software* CoolTerm com a Serial do Arduino UNO. Após a aquisição dos dados, foi utilizado um *software* matemático para a plotagem dos gráficos com os resultados obtidos. Os valores referentes aos parâmetros do controlador por modo deslizante foram estimados por tentativa e erro ao longo dos experimentos realizados.

Na figura (37) vemos o desempenho do controle por modo deslizante sobre sistema físico *Seesaw Propeller*. É possível observar que o controlador obteve um bom desempenho, conseguindo entregar uma trajetória muito próxima à referência considerada. Vale lembrar que o sistema físico possui algumas não linearidades não consideradas na sua dinâmica. Isso acontece por conta de vários fatores presentes após sua construção, como por exemplo: atrito entre algumas partes do sistema, força exercida pelos fios contrárias ao movimento da haste, falta de simetria do sistema, etc. Apesar desses fatores, o controlador foi capaz

de entregar um bom resultado. O valor de erro quadrático médio encontrado foi de  $E_{QM} = 2,94$ . A figura (38) mostra o esforço de controle com a utilização da função sinal na estrutura da lei de controle.

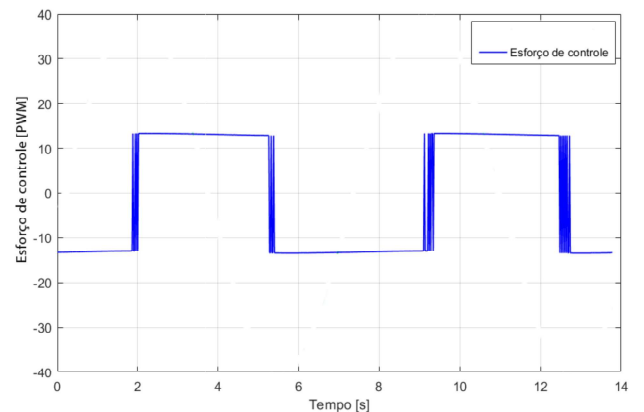
Figura 37. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

Como já era esperado, a figura (38) mostra a presença do *chattering* no esforço de controle do sistema físico, porém, diferentemente do resultado encontrado por simulações numéricas, o *chattering* acontece apenas quando a referência muda o sentido de sua trajetória. Isso acontece devido as diferenças entre um modelo teórico e o sistema físico real, no qual, inevitavelmente, possui diferenças significativas em sua construção.

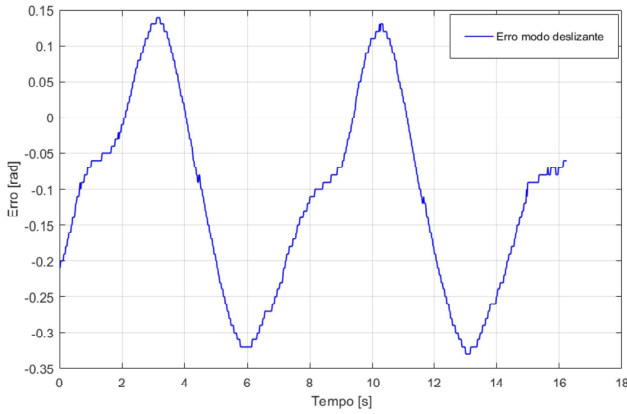
Figura 38. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

Na figura (39) vemos o comportamento do erro de rastreamento do sistema físico com o controle por modo deslizante. Como podemos observar, o valor do erro oscilou em uma pequena faixa em torno de zero. Esse comportamento é pertinente, pois apesar das limitações da construção do sistema, o controlador foi capaz de estabelecer uma boa margem de erro.

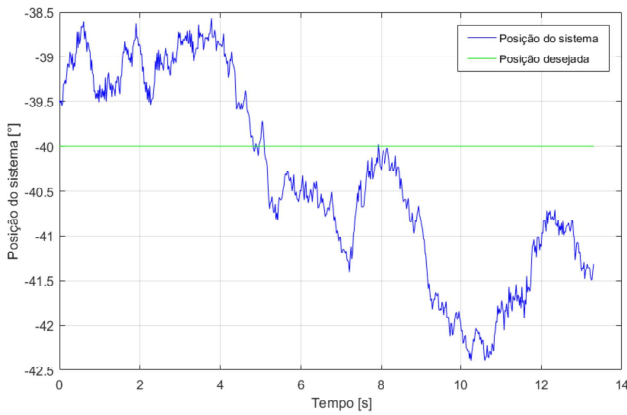
Figura 39. Erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

Também foram feitas simulações com a função sinal presente na lei de controle para uma referência constante. O valor de referência adotado para esses testes foi de  $\theta_d = -40^\circ$ . As figuras (40), (41) e (42) trazem os resultados experimentais obtidos.

Figura 40. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = -40^\circ$  com a utilização da função sinal.

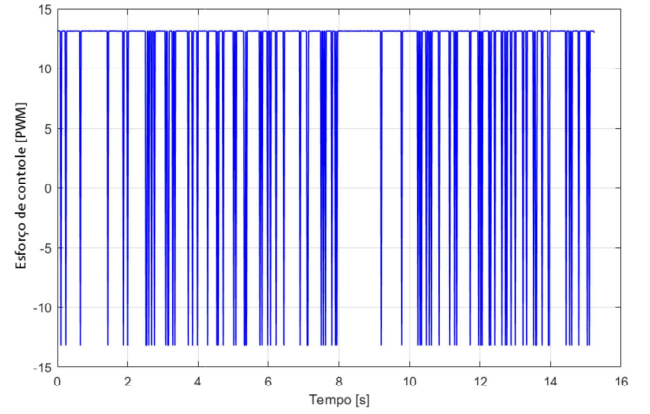


Fonte: Autoria própria.

A figura (40) representa o comportamento do sistema para um referência constante. Visivelmente o controlador teve uma maior dificuldade para a estabilização do sistema sobre essa referência, além disso, é possível observar que o ângulo do sistema se manteve um pouco instável. Essa instabilidade é ocasionada na maior parte pelo fenômeno de *chattering* no sinal de saída da lei de controle. O valor do erro quadrático médio para essa trajetória apresentou um aumento em relação ao valor do erro para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ . O valor do erro obtido foi de  $E_{QM} = 33,39$ .

A figura (41) mostra claramente o *chattering* no esforço de controle com utilização da função sinal. A figura (41) possui ligeira semelhança com a figura (16). Esse esforço de controle é consequência direta da utilização da

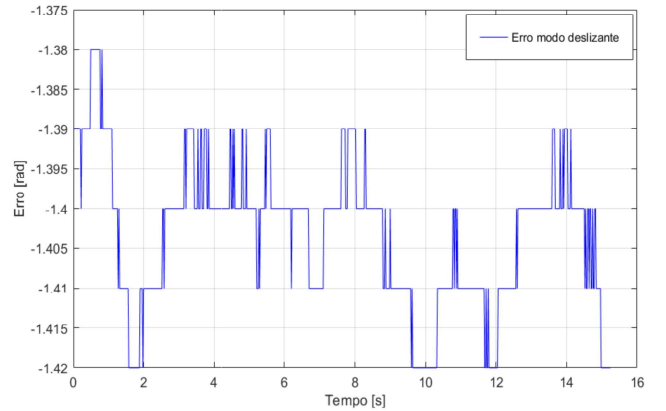
Figura 41. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = -40^\circ$  com a utilização da função sinal.



Fonte: Autoria própria.

função descontínua na estrutura da lei de controle da equação (18). Foi possível observar durante os experimentos que o *chattering* ocasionou mudanças rápidas no sentido do giro dos motores DC, e mesmo assim os motores foram capazes de reproduzir o sinal de saída do controlador de maneira satisfatória.

Figura 42. Erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = -40$  com a utilização da função sinal.



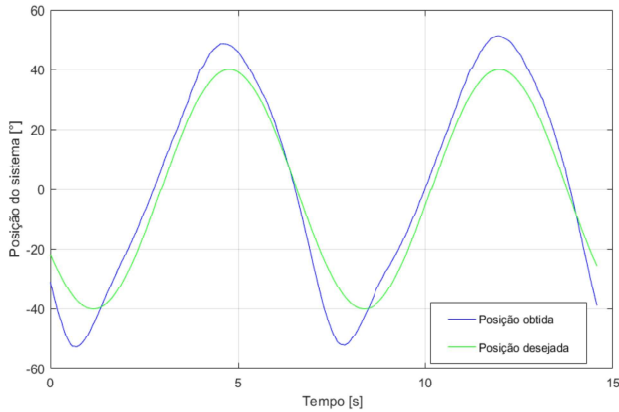
Fonte: Autoria própria.

Na figura (42) temos o erro de rastreamento do sistema. Nessa figura, os valores de erro medidos foram maiores do que os valores de erro presente na figura (39), porém, os valores de erro se mantiveram em uma faixa aceitável, mostrando que o sistema conseguiu se manter próximo da referência. Vale ressaltar que devido ao passo de 0,02 utilizado para a implementação do gráfico no *software* matemático, a figura (42) não entregou uma curva suave com os valores de erro.

Para os experimentos com a função tanh na estrutura da lei de controle, os resultados encontrados se mantiveram próximos aos resultados com a utilização da função sinal. Nas figuras (43), (44) e (45) vemos a performance do controlador para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ .

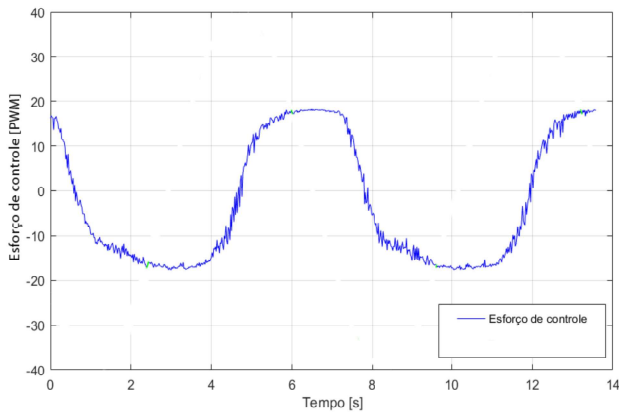


Figura 43. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função tanh.



Fonte: Autoria própria.

Figura 44. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função tanh.



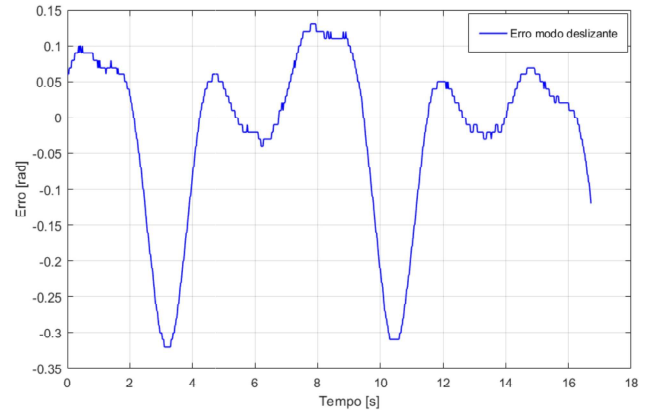
Fonte: Autoria própria.

Na figura (43) a resposta do sistema com a utilização da função tanh no controlador se mostrou próxima da resposta encontrada na figura (37). Com isso, apesar da mudança da função dentro do controlador, o controle por modo deslizante manteve um bom resultado sobre a referência  $\theta_d = \sin(t)$ . O erro quadrático médio, como já previsto, apresentou resultados superiores ao erro encontrado utilizando a função sinal. O valor de erro encontrado foi de  $E_{QM} = 3,39$  não muito distante do percentual de erro para a função sinal, que foi de  $E_{QM} = 2,94$ . A figura (44) mostra o esforço de controle com a utilização da função tanh.

Como mostrado na figura (44), o esforço de controle é bastante diferente do esforço encontrado na figura (38). A figura (44) mostra que ao utilizar uma função contínua, o *chattering* é eliminado do sistema. Outro ponto importante é que a suavização da curva do esforço de controle com a função contínua se dá pela sintonia adequada do parâmetro  $k$ .

O comportamento do erro de rastreamento presente na figura (45) mostra uma oscilação em torno de zero. Essa

Figura 45. Erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$  com a utilização da função tanh.

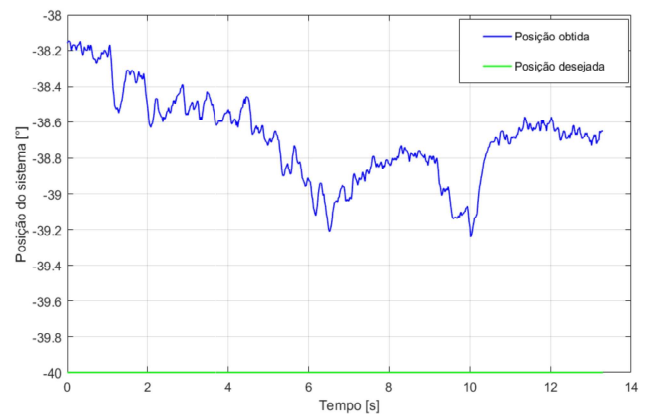


Fonte: Autoria própria.

oscilação é condizente com a resposta do sistema mostrada na figura (43), na qual ao longo de toda análise ocorreu uma pequena diferença entre a resposta do sistema e a referência utilizada. Tanto a figura (45) quanto a figura (39) mostraram praticamente os mesmos valores absolutos de erro máximo durante os experimentos. Essa informação retrata aspectos semelhantes para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ .

Nas figuras (46), (47) e (48) temos os resultados do experimento para uma referência constante na forma de  $\theta_d = -40^\circ$ .

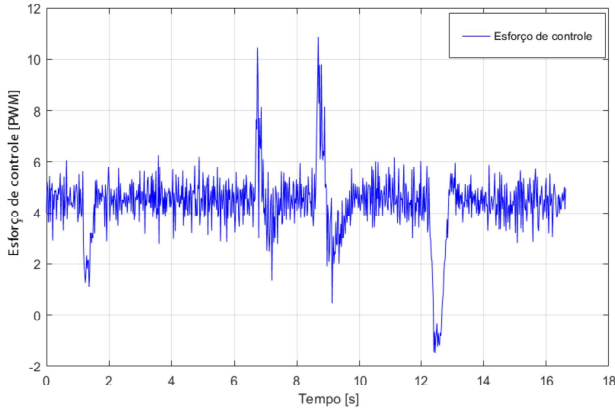
Figura 46. Resposta do sistema utilizando o controle por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = -40^\circ$  com a utilização da função tanh.



Fonte: Autoria própria.

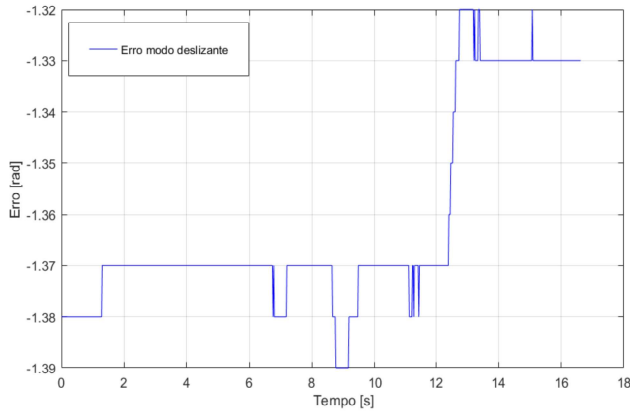
A figura (46) mostra o comportamento do sistema sobre uma referência constante. Nessa figura é possível observar que o controlador em nenhum momento foi capaz de fazer com que o sistema chegasse até o valor da referência. Apesar desse fato, a posição angular do sistema se manteve bastante próxima a posição tomada como referência. O percentual de erro quadrático médio encontrado durante esse experimento apresentou um valor maior do que o percentual encontrado com a utilização da função sinal no

Figura 47. Esforço de controle do controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = -40^\circ$  com a utilização da função tanh.



Fonte: Autoria própria.

Figura 48. Erro de rastreamento do sistema utilizando o controlador por modo deslizante para uma referência do tipo  $\theta_d = -40^\circ$  com a utilização da função tanh.



Fonte: Autoria própria.

controlador. O valor do erro quadrático médio encontrado foi de  $E_{QM} = 42,10$ .

Na figura (47) vemos que o esforço de controle apresentado pelo controlador com a função tanh exibe uma pequena semelhança com o esforço de controle encontrado com a utilização da função sinal. Porém, o comportamento do esforço de controle da figura (47) não é causado por nenhuma descontinuidade na estrutura da lei de controle, esse comportamento está ligado principalmente a sintonia dos parâmetros feita durante os experimentos físicos, além dos ruídos presentes na aquisição de dados. Como já mencionado anteriormente, devido as diversas deficiências na construção de um sistema físico, não é surpresa que os resultados encontrados na prática sejam um pouco diferentes daqueles encontrados em simulações numéricas.

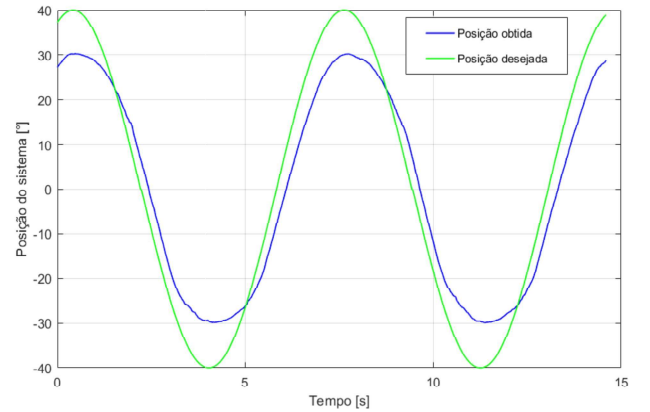
A figura (48) mostra o erro de rastreamento com a utilização da função tanh para uma referência constante. Assim como aconteceu na figura (42), devido ao passo utilizado na aquisição de dados, o gráfico apresenta uma forma não suavizada do erro. Por outro lado, é possível observar que valor absoluto de erro encontrado no experi-

mento se manteve em valores aceitáveis, o que mais uma vez comprova a eficácia do controle por modo deslizante, sobretudo em sistemas não lineares.

## 6.2 Resultados Experimentais com o Controle PID

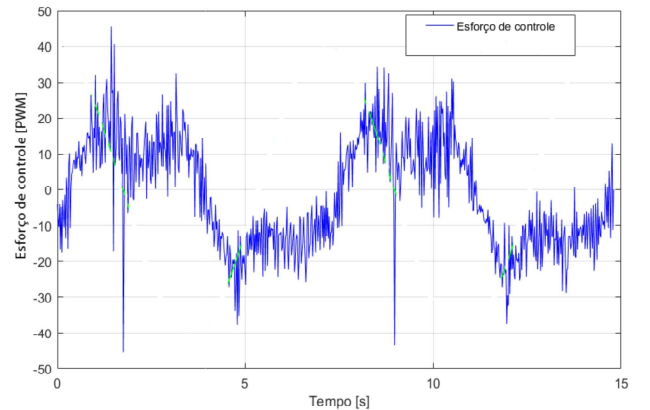
Nos experimentos com o controlador PID, foram utilizados os mesmos *softwares* dos experimentos anteriores. Para a análise experimental do controlador PID, o método de sintonia adotado foi o método por tentativa e erro. Diante disso, os parâmetros do controlador estabelecidos foram:  $K_p = 110$ ,  $K_i = 5,4$  e  $K_d = 92$ . As figuras (49), (50) e (51) mostram o desempenho do controlador para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ .

Figura 49. Resposta do sistema utilizando o controle PID para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ .



Fonte: Autoria própria.

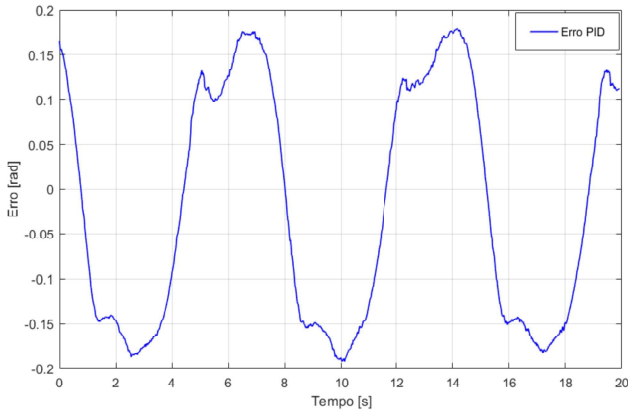
Figura 50. Esforço de controle utilizando o controlador PID para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ .



Fonte: Autoria própria.

Na figura (49) temos o comportamento do sistema com o controle PID. Como é possível observar, a performance do controle PID é bastante satisfatória, apesar do sistema físico ser de natureza não linear. O controlador entregou uma trajetória próxima a referência estabelecida. O valor de erro quadrático médio encontrado com a utilização do PID foi de  $E_{QM} = 6,84$ . Esse valor é maior que o valor encontrado nos experimentos com o controle por

Figura 51. Erro de rastreamento do sistema com utilizando o controlador PID para uma referência do tipo  $\theta_d = \sin(t)$ .



Fonte: Autoria própria.

modo deslizante, porém não deixa de ser um valor baixo, principalmente por se tratar de um controlador linear.

A figura (50) mostra o esforço do controle do controlador PID para uma referência  $\theta_d = \sin(t)$ . É possível notar que o esforço de controle teve bastante oscilação ao longo do experimento. Outro ponto que vale ressaltar é que os valores absolutos do esforço de controle apresentaram valores bem acima dos esforços de controle presentes nas figuras (38) e (44). Esse esforço de controle maior se dá pelos valores adotados para os parâmetros do controlador, de modo que o sistema apresentasse uma resposta satisfatória.

Na figura (51) podemos ver que o erro de rastreamento do controle PID se manteve em valores baixos, assim como com o controlador modo deslizante. Além disso, o erro do sistema com o controle PID é aceitável devido a sua natureza linear. O erro se manteve oscilando em torno de zero, com uma amplitude relativamente baixa e próxima das amplitudes encontradas nas figuras (39) e (45).

## 7. CONCLUSÃO

Com os resultados obtidos nesse trabalho, vimos que a aplicação do controle linear PID no sistema físico não linear, apresentou resultados satisfatórios. Não por acaso essa técnica ainda é muito utilizada na indústria em geral. Entretanto, para um rastreamento mais preciso de uma referência oscilatória, o controle PID não é o mais eficiente/indicado. Quando um sistema não linear está próximo de uma zona estável, as não linearidades do sistema acabam não se sobrepondo ao controlador. Esse fato não acontece, por exemplo, quando o controlador precisa rastrear uma trajetória mais distante de um ponto de equilíbrio, pois nesse caso as não linearidades do sistema serão predominantes na performance do controlador.

Com o controlador não linear por modo deslizante foi possível obter ótimos resultados, tanto nas simulações numéricas, quanto nos experimentos. A abordagem do controle por modo deslizante com duas funções diferentes na estrutura da lei de controle mostrou as principais diferenças entre elas na performance do sistema. A mudança

no esforço de controle se dá pelo tipo de deslizamento que acontece na superfície  $S(t)$ . Enquanto que com a função sinal esse deslizamento se dá por meio de um chaveamento excessivo, acarretando assim no *chattering*, com a função  $\tanh$  o deslizamento ocorre de maneira suave, proporcionando assim, um esforço de controle mais atrativo. Vale ressaltar que com a utilização da função sinal, o controle por modo deslizante remete a um problema de rastreamento perfeito e ao se utilizar a função tangente hiperbólica, o controle passa a oferecer um problema de rastreamento com precisão garantida. Essa afirmação foi comprovada por meio dos resultados de erro quadrático médio obtidos no trabalho.

A adaptação da técnica de controle por modo deslizante na prática foi de extrema importância. A construção e execução do sistema físico *Scsaw Propeller* mostrou o poder da teoria de controle não linear para esses sistemas. Essa teoria é de suma importância, pois através de experimentos, como os que foram realizados neste trabalho, foi possível mostrar o seu potencial para a indústria.

Como sugestões para trabalhos futuros, fica a possibilidade da implementação do controle por modo deslizante junto com uma rede neural para compensar as incertezas presentes no sistema. Além disso, a implementação dos controladores junto a uma interface gráfica para facilitar o manuseio dos parâmetros do sistema.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus familiares, principalmente a minha mãe Odete Souza Figueiredo, por sempre me incentivar, me apoiar e acima de tudo me ajudar a chegar onde cheguei.

Ao prof. Philippe Eduardo de Medeiros que me orientou durante todo o trabalho e forneceu a possibilidade para que este trabalho fosse feito, além de fornecer sua ajuda durante toda a execução.



## REFERÊNCIAS

- BERTOLDO, G.E.B. *Modelo Matemático Arimax de Propulsores Eletromecânicos Com Sustentação Aerodinâmica Horizontal*. Dissertação de mestrado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ, 2019.
- BESSA, W.M. *Controle por Modos Deslizantes de Sistemas Dinâmicos com Zona Morta Aplicado ao Posicionamento de ROVs*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2005.
- DECARLO, R.A., ZAK, S.H., MATTHEWS, G.P. *Variable structure control os nonlinear multivariable systems*. Taylor & Francis Group, Nova York, 1988.
- DORF, RICHARD C.; BISHOP, R. *Sistemas de Controle Moderno*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.
- KIM, J.N., ROH, M.S., SONG, J.B., SONG, W.J. KANG, B.S., KIM, J. An experimental study of a single axis seesaw attitude control consisting of motor and propeller. *International Journal of Systems Science*, 2012.
- MONTENEGRO, M.C. *Controle de Sistemas Dinâmicos Não Lineares Via Linearização por Realimentação Com Compensação Fuzzy de Incertezas*. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2019.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, Rio de Janeiro, 2010.
- SLOTINE, J.J., LI, W. *Applied nonlinear control*. Prentice hall Englewood Cliffs, Nova Jersey, 1991.
- UTKIN, V.I., GULDNER, J., SHI, J. *Sliding Mode Control in Electro-Mechanical Systems*. Taylor & Francis Group, Nova York, 2009.
- UTKIN, V.I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.