UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Graduação em Licenciatura Plena em Matemática

Silvio Cavalcanti Bonfim

Cremona, Jonquières e o Dual Complementar de Newton

RECIFE
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Graduação em Licenciatura Plena em Matemática

Silvio Cavalcanti Bonfim

Cremona, Jonquières e o Dual Complementar de Newton

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Orientadora: Prof. Dra. Bárbara Costa da Silva

RECIFE
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B713c C. Bonfim, Silvio Cavalcanti Bonfim
Cremona, Jonquières e o Dual Complementar de Newton / Silvio Cavalcanti Bonfim C. Bonfim. - 2021.
45 f.

Orientadora: Barbara Costa da Silva.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2021.

1. Cremona. 2. Jonquières. 3. Newton. 4. Dual. 5. Complementar. I. Silva, Barbara Costa da, orient. II. Título

CDD 510

DEPARTAMENTO DE HISTÓRIA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO DE TCC

SILVIO CAVALCANTI BONFIM

CREMONA JONQUIÈRES E O DUAL COMPLEMENTAR DE NEWTON

Trabalho de conclusão de curso aprovado com nota 9.8 como requisito para conclusão da disciplina de monografia (Cód. 06108), pela seguinte banca examinadora:

Orientador: ______________________________ Nota: 9,8
Prof. Dr./Ms. Bárbara Costa da Silva
Departamento de Matemática – UFRPE

Membro: ______________________________ Nota: 10,0
Prof. Dr./Ms. Rodrigo José Gondim Neves
Departamento de Matemática – UFRPE

Membro: ______________________________ Nota: 9,7
Prof. Dr./Ms. Ricardo Burity Croccia Macedo
Departamento de Matemática – UFPB

Média das notas	9,8

Recife, 25 de Fevereiro de 2021.

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio em todos os momentos difíceis da minha trajetória acadêmica. Este trabalho é dedicado a eles e a Maria A. C. da Silva.

Agradecimentos

Agradeço ao Criador do Universo, porque sem ele nada seria possível.

Aos meus pais, Silvia Paula Cavalcanti e Osias de Abreu Bonfim, a meu irmão Sillas Cavalcanti Bonfim, a meu tio Djalmir Candido Cavalcanti e a minha vó Maria Aparecida Cavalcanti da Silva, pela confiança no meu progresso e pelo apoio emocional provido ao longo da minha vida.

A todos os meus professores do curso de licenciatura plena em matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco pela excelência da qualidade técnica de cada um.

Deixo um agradecimento especial a minha orientadora Bárbara Costa da Silva por sempre me fazer pensar e questionar sobre o tema do meu trabalho de pesquisa.

"O sonho é grande
E mesmo que pareça distante
Minha força é o que me garante"
(Louco e Sonhador - MC N. do Kaxeta)

Resumo

O presente trabalho trata da relação entre o dual complementar de Newton e os mapas birracionais, que teve origem nos trabalhos de B. Costa, A. Simis e A. Dória. Inicialmente apresentará conceitos necessários de álgebra comutativa e geometria algébrica através da ótica algébrica. Na sequência abordará o tema principal, dual complementar da Newton e suas propriedades pressupondo que os conjuntos de monômios satisfazem a restrição canônica. E em seguida, discutirá a relação entre a birracionalidade e o dual complementar de Newton analisando que o dual complementar dos representantes de mapas de Cremona e Jonquières preserva as estruturas dos mapas.

Palavras-chave: Cremona, Jonquières, Newton, Dual, Complementar.

Abstract

The present work deals with the relationship between Newton's dual complement and birational maps, which it originated in the works of B. Costa, A. Simis and A. Dória. Initially, it presented the necessary concepts of commutative algebra and algebraic geometry through algebraic optics. In sequence, it addressed Newton's main, dual complementary theme and its properties, assuming that the sets of monomials satisfy the canonical constraint. And then, it discussed the relationship between birationality and Newton's complementary dual, analyzing that the dual complements and preserves the elements of the Cremona group and the Jonquières maps subgroup.

Keywords: Cremona, Jonquières, Newton, Dual, Complementary.

Sumário

Introdução

O objetivo desse trabalho é compreender a relação entre a birracionalidade e o dual complementar de Newton de um conjunto de formas de mesmo grau em um anel de polinômios com $n+1$ indeterminadas que definem um mapa birracional, mais precisamente verificar que o dual de Newton de um conjunto de formas que define um mapas de Jonquières ainda define um mapa de Jonquières. Para isso definimos conceitos preliminares e demostraremos resultados necessários para o desenvolvimento dessa teoria.

O conceito de dual complementar de Newton foi primeiramente apresentado em [9] com os mapas birracionais definidos por monômios de mesmo grau. Depois desenvolvido no artigo [3], um dos textos-base desse trabalho, ainda com mapas birracionais monomiais. Nesse artigo são abordados definições e propriedades de mapas birracionais para depois definir a matriz de Newton de um conjunto de formas como a concatenação das matrizes de Newton de cada uma das formas. Em seguida define a matriz do dual complementar de Newton do conjunto para obtermos um novo conjunto de forma chamado *dual complementar de Newton* construída a partir da notação de Newton com a matriz dual. Em seguida demostra que a dualidade preserva a birracionalidade em qualquer mapa birracional e preserva a estrutura dos mapas de Jonquières em $\mathbb{P}^2$. Posteriormente os resultados do artigo [3] foram estendidos e generalizados no artigo [4], o segundo texto-base desse trabalho, com ênfase nos mapas de Cremona definidos por formas de mesmo grau e mostrando que a dualidade preserva a estrutura das formas que define os mapas de Jonquières em $\mathbb{P}^n$ (Teorema 4.4).

O primeiro capítulo é dedicado a apresentar conceitos necessários para a compreensão e demonstração de resultados tratados posteriormente. Esse capítulo é dividido em duas sessões no qual a primeira expõe os conceitos de corpos de frações, ideais homogêneos e ideais tóricos com resultados fundamentais que serão usados para demonstra um critério que caracteriza a birracionalidade em mapas racionais (Teorema 1.2). Na segunda sessão apresenta as definições de espaço projetivo, conjuntos algébricos, conjuntos algébricos irredutíveis, variedades algébricas, ideais de um conjunto algébrico e anel de coordenadas homogêneas e resultados clássicos que relacionam subconjuntos do espaço projetivo com seus ideais (Proposição 1.13) e variedades projetivas com ideais primos (Teorema 1.14). O objetivo dessa parte é proporcionar uma familiaridade com a linguagem utilizada nos resultados posteriores e obter ferramentas para utilizarmos em capítulos posteriores.

No segundo capítulo discutimos o dual complementar de Newton. Nele é definido o dual complementar de Newton de uma forma e de um conjunto de formas, a matriz de Newton e a restrição canônica em seguida mostramos que $f(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\beta_0} \dots x_n^{d-\beta_n} \widehat{f}$ no qual f é uma forma de grau d (Proposição 2.6), que o dual do produto é o produto do dual e o dual do dual complementar de Newton é o próprio conjunto de formas desde que satisfaça a restrição canônica (proposição 2.9). Logo após, fazemos uma ponte entre o dual complementar de Newton e isomorfismos de k-álgebras utilizando os conceitos apresentados no capítulo anterior.

O terceiro capítulo é dividido em duas seções em que na primeira definimos mapas racionais, um critério para verificar se dois conjuntos de formas definem o mesmo mapa racional, imagem de um mapa racional, mapas birracionais e mapas de Cremona. Também discutimos que o grau dos representantes é um invariante e mostramos que a birracionalidade ocorre se, e somente se, a igualdade $k(X_d) = k(\mathbf{f})$ é satisfeita desde que $\mathbf{f}$ seja um conjunto de formas de grau d (Proposição 3.6) o que nos garante uma caracterização de mapas birracionais por meio de corpos de frações. E na segunda seção damos os primeiros passos para alcançar nosso objetivo mostrando que o dual de um mapa birracional monomial satisfazendo a restrição canônica ainda é um mapa birracional, isto é, a birracionalidade é preservada no caso monomial (Teorema 3.9) e em seguida generalizamos esse resultado para o caso em que o mapa não é monomial (Teorema 3.11). Por fim, mostramos que a inversa do dual é o dual da inversa no caso em que o mapa é definido por monômios.

O quarto e último capítulo tratamos dos mapas de Jonquières. Na primeira seção definindo o que são x_n-monóides, mostramos que o dual complementar de Newton de um x_n-monóide ainda é um x_n-monóide para então definir os mapas de Jonquières. E na segunda seção mostramos o resultado principal do texto no qual afirma que o dual complementar de Newton preserva a estrutura dos mapas de Jonquières, ou seja, os duais complementares de Newton de representantes de mapas de Jonquières ainda representam mapas de Jonquières (Teorema 4.4).

1 Conceitos Fundamentais

A álgebra comutativa teve início nos trabalhos de Julius Wilhelm Richard Dedekind com a introdução formal na literatura do conceito de ideal na terceira e quarta edições do Vorlesungen über Zahlentheorie. Porém, o termo anel não veio de Dedekind, foi apresentado por David Hilbert no artigo *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiningung*. Além disso, os trabalhos de Hilbert influenciaram Emmy Amalie Noether no estudo da álgebra abstrata com abordagem abstrata e axiomática do tema.

Já a geometria algébrica teve seu início nas escolas italianas nas décadas de 1910 e 1920 e depois teve seu desenvolvimento abstrato com os trabalhos de Kunihiko Kodaira e Donald Clayton Spencer apresentando resultados em geometria algébrica complexa. A geometria algébrica consiste em combinar técnicas da álgebra abstrata com a linguagem da geometria. Essa combinação ajudou a desenvolver ideias utilizadas pra resolver problemas como a conjectura de André Abraham Weil e o último teorema de Pierre de Fermat.

O objetivo desse capitulo é introduzir conceitos necessários de álgebra comutativa e geometria algébrica e relações entre às duas vertentes da matemática.

1.1 Álgebra Comutativa

Um anel A é dito *noetheriano* se todo ideal I de A é finitamente gerado, isto é, existem $a_0, \dots, a_n \in A$ tais que todo elemento de I é escrito com $r_0a_0 + \cdots + r_na_n$ com $r_0, \dots, r_n \in A$. Em outras palavras, A é noetheriano se para todo ideal $I \subset A$ existem $a_0, \dots, a_n \in A$ tais que $I = (a_0, \dots, a_n)$. Observe que qualquer corpo k é um anel noetheriano visto que seus únicos ideais são os triviais. Além disso, segundo Atiyah and MacDonald [2, Corolário 7.6][1] se k é corpo então $k[x_0, \dots, x_n]$ é noetheriano.

Um corpo k é *algebricamente fechado* se todo polinômio não contante $f(x) \in k[x]$ é fatorado completamente como produto de polinômios de grau 1, isto é, Se $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in k[x]$ com $n > 0$ então $f(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - b_i)$ com $a, b_1, \dots, b_n \in k$.

Proposição 1.1. *Um corpo k é algebricamente fechado se, e somente se, todo polinômio não constante de $k[x]$ possui uma raiz $\alpha \in k$.*

Demonstração. Suponha que k é algebricamente fechado. Seja $f(x) \in k[x]$ um polinômio

[1] **Corollary 7.6.** *If A is Noetherian so is $A[x_1, \dots, x_n]$.*

de grau $d > 0$. Então $f(x) = a\prod_{i=1}^{d}(x - b_i)$ com $a, b_0, \ldots, b_n \in k$. Observe que b_j é raiz de $f(x)$ para todo $j \in \{0, \ldots, d\}$ uma vez que

$$f(b_j) = a\prod_{i=1}^{d}(b_j - b_i) = a(b_j - b_j)\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{d}(b_j - b_i) = 0.$$

Agora suponha que todo polinômio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ não constante de $k[x]$ possui uma raiz $\alpha \in k$. Para mostrar que $f(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - b_i)$ procedemos com indução finita sobre n. Para $n = 1$ tem-se $f(x) = ax - a\alpha = a\prod_{i=1}^{1}(x - \alpha)$. Suponha que o resultado é válido para todo $n \leq k$, isto é, todo polinômio de grau menor ou igual a k é escrito como produto de polinômios de grau 1. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i$. Como $f(x)$ possui uma raiz $\alpha \in k$ tem-se $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ em que $q(x)$ tem grau k. Logo, por hipótese de indução $q(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x - b_i)$. Definindo $b_{k+1} = \alpha$ segue que

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) = a(x - \alpha)\prod_{i=1}^{k}(x - b_i) = a\prod_{i=1}^{k+1}(x - b_i).$$

$\square$

O *corpo de fração* $frac(D)$ de domínio de integridade D é o corpo obtido invertendo todos os elementos não nulos de D. Em outras palavras, é o conjunto dos pares ordenados $(a, b) \in D \times D - \{0\}$ módulo a relação de equivalência que identifica (a, b) e (c, d) por $ad = bc$. Denotamos o par (a, b) por $\frac{a}{b}$. Simbolicamente $frac(D) = \left\{\frac{a}{b},\ a \in D \text{ e } b \in D - \{0\}\right\}$ em que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \cdot d = b \cdot c$. Ademais, se $k[\mathbf{s}]$ é o anel de polinômios com coeficientes em k, em que k é corpo, e indeterminadas em um conjunto $\mathbf{s}$ denotamos $frac(k[\mathbf{s}]) := k(\mathbf{s})$. Doravante considere k corpo algebricamente fechado e $R = k[x_0, \ldots, x_n]$.

Teorema 1.2. *Seja $X_d \subset R$ o conjunto de todos os monômios de grau d. Então $k(X_d) = k\left(x_0^d, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.*

Demonstração. Seja $x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n} \in k[X_d]$ um monômio de grau d. Então,

$$x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n} = \frac{x_0^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{x_0^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}} x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n} = x_0^d \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{\alpha_n} \in k\left(x_0^d, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Concluindo que $k(X_d) \subset k\left(x_0^d, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.

É evidente que $x_0^d \in k(X_d)$ uma vez que $x_0^d \in X_d$. Resta verificar que $\frac{x_i}{x_0} \in k(X_d)$. Contudo,

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{x_0^{d-1}}{x_0^{d-1}}\frac{x_i}{x_0} = \frac{x_0^{d-1}x_i}{x_0^d},$$

como $x_0^d, x_0^{d-1}x_i \in X_d$ segue por definição que $k\Big(x_0^d, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\Big) \subset k(X_d)$ concluindo a demonstração. □

Uma *forma, ou polinômio homogêneo, ou ainda, elemento homogêneo* $F \in R$ de grau d é um polinômio $F = \sum a_i x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$, com $i_0 + \cdots + i_n = d$ para toda n-upla $(i_0, \ldots, i_n)$. Um ideal $I \subset R$ é *homogêneo* se para todo $F = \sum\limits_{i=0}^{n} F_i \in I$ em que F_i é uma forma de grau i, tem-se $F_i \in I$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Proposição 1.3. *Seja $I \subseteq R$ um ideal. Então I é homogêneo se, e somente se, é gerado por elementos homogêneos.*

Demonstração. Suponha I homogêneo. Então, por definição,

$$I = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}_+} (I \cap R_i)$$

no qual R_i são os polinômios homogêneos de grau i em R. Portanto, I é gerado pelos conjuntos $\{I \cap R_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ que são formados por elementos homogêneos.

Suponha que I é gerado por $\{h_\alpha\}$ conjunto de elementos homogêneos. Seja $f \in I$ um elemento arbitrário. Decompondo f em soma de elementos homogêneos tem-se $f = \sum f_i$. Por outro lado, $f = \sum q_\alpha h_\alpha$ com $q_\alpha \in R$. Considerando a i-ésima componente homogênea de f temos que

$$f_i = \sum (q_\alpha)_{i - deg(h_\alpha)} h_\alpha,$$

no qual $(q_\alpha)_{i-deg(h_\alpha)}$ refere-se a componente homogênea com grau $i - deg(h_\alpha)$ de q_α. Desse modo concluímos que $f_i \in I$ uma vez que f_i é uma combinação linear dos geradores de I. □

Exemplo 1.4. O ideal $P = (t_1t_2 - t_3^2) \subset k[t_1, t_2, t_3]$ é homogêneo de acordo com a proposição 1.3.

Além dos ideais homogêneos, um outro tipo de ideal necessário para a compreensão do texto são os *ideais tóricos*. Um ideal $P \subset k[t_0, \ldots, t_q]$ é dito *tórico* se existe um conjunto finito $\mathbf{f} = \{x^{v_0}, \ldots, x^{v_q}\} \subset k\Big[x_0, \ldots, x_n, \frac{1}{x_0}, \ldots, \frac{1}{x_n}\Big]$ tal que P é o núcleo do homomorfismo sobrejetor induzido da k-álgebra

$$\varphi : k[t_0, \ldots, t_q] \longrightarrow k[\mathbf{f}], \text{ tal que } \varphi(t_i) = x^{v_i}.$$

O ideal P é chamado de ideal *tórico* de $k[\mathbf{f}]$ e é denotado por $P_{\mathbf{f}}$.

Exemplo 1.5. O ideal P definido no exemplo 1.4 é *tórico* de $k[x^2, y^2, xy]$. É evidente que $P \subset ker\varphi$, visto que $\varphi(t_1t_2 - t_3^2) = x^2y^2 - (xy)^2 = 0$. Suponha que $P \subsetneq ker\varphi$. Seja $f \in Ker\varphi \cap A[t_3]$, com $A = k[t_1, t_2]$, o polinômio de menor grau que não está em P. Como $A[t_3]$ é um domínio Euclidiano então existem $q, r \in A[t_3]$ no qual

$$f = q(t_2t_1 - t_3^2) + r, \text{ com } deg(r) < 2.$$

Porém $\varphi(r) = \varphi(f - q(t_2t_1 - t_3^2)) = \varphi(f) - \varphi(q)\varphi((t_2t_1 - t_3^2)) = 0$ o que contradiz a minimalidade do grau de f. Portanto $P = ker\varphi$.

1.2 Geometria Algébrica

O *espaço afim de dimensão n*, denotado por $\mathbb{A}_k^n$, é o produto cartesiano k por k n vezes, ou seja k^n. Dessa forma os elementos de $\mathbb{A}_k^n$ são as n-uplas formadas por elementos de k.

Definição 1.6 (Espaço projetivo)**.** O espaço projetivo de dimensão n é definido por

$$\mathbb{P}_k^n := \mathbb{P}^n := \mathbb{A}_k^{n+1} - \{0\}/\sim$$

em que

$$(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n) \text{ se, e somente se, } x_i = \lambda y_i, \ \forall\, i \in \{0, \ldots, n\} \text{ com } \lambda \in k \backslash \{0\}.$$

A classe de equivalência do ponto de coordenada $(x_0, \ldots, x_n)$ é denotado por $(x_0 : \cdots : x_n)$ e dizemos que $x_0, \ldots, x_n$ são as *coordenadas homogêneas ou coordenadas projetivas do ponto.*

Com a definição 1.6 é necessário verificar que a relação $\sim$ definida anteriormente é uma relação de equivalência. De fato:

- **Reflexiva**: Para $(x_0, \ldots, x_n)$ tem-se $x_i = 1x_i$;
- **Simétrica**: Se $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ então existe $\lambda \in k \backslash \{0\}$ tal que $x_i = \lambda y_i$, logo $\lambda^{-1}x_i = y_i$, ou seja, $(y_0, \ldots, y_n) \sim (x_0, \ldots, x_n)$;
- **Transitiva**: Se $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ e $(y_0, \ldots, y_n) \sim (z_0, \ldots, z_n)$, então existem $\lambda, \gamma \in k \backslash \{0\}$ tais que $x_i = \lambda y_i$ e $y_i = \gamma z_i$. Logo, $x_i = (\lambda\gamma)z_i$, isto é, $(x_0, \ldots, x_n) \sim (z_0, \ldots, z_n)$.

Se $U \subset R$ é um conjunto qualquer de formas definimos $\mathcal{V}(U) = \{P \in \mathbb{P}^n : F(P) = 0 \text{ para todo } F \in U\}$ como o *conjunto de zeros de* U.

Pensando na definição de $\mathcal{V}(U)$ é plausível questionar se a noção $F(P) = 0$ tal que $P \in \mathbb{P}^n$ está bem definida, isto é, $F(P) = 0$ independe da escolha do representante para P. De fato, sejam $F \in R$ uma forma de grau d, $P = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ tal que $F(P) = 0$ e $\lambda \in k \backslash \{0\}$. Note que $(x_0 : \cdots : x_n) = (\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n)$ então $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n) = \lambda^d 0 = 0$ concluindo a independência do representante.

Definição 1.7 (Conjunto Algébrico)**.** Um subconjunto $S \subset \mathbb{P}^n$ é um *conjunto algébrico projetivo*, ou simplesmente, *conjunto algébrico* se $S = \mathcal{V}(U)$ em que U é um conjunto finito de formas.

Exemplo 1.8. O conjunto $S = \{(1 : 0)\}$ é algébrico em $\mathbb{P}^1$. De fato, considere $U = \{y\} \subset k[x, y]$ portanto $\mathcal{V}(U) = \{(x : y) \in \mathbb{P}^1,\ y = 0\} = \{(x : 0)\}$. Então $\mathcal{V}(U) = \{(1 : 0)\}$ visto que $x \neq 0$.

Seja $S \subset \mathbb{P}^n$, o ideal gerado pelo conjunto $\{F \in R :\ F(P) = 0,\ \forall\ P \in S\}$, é chamado de *ideal de* S e representamos por $\mathcal{I}(S)$. Um vez que, k é anel noetheriano então R é um anel noetheriano, por consequência, o ideal $\mathcal{I}(S)$ é finitamente gerado para qualquer $S \subset \mathbb{P}^n$.

Observe que o ideal $\mathcal{I}(S)$ com $S \subset \mathbb{P}^n$ é um ideal homogêneo. Sejam $F \in \mathcal{I}(S)$ tal que $F = \sum_{i=0}^{n} F_i$ com F_i forma de grau i, $P = (a_0 : \cdots : a_n) \in S$ e $\lambda \in k \backslash \{0\}$ então

$$0 = F(P) = F(\lambda a_0, \ldots, \lambda a_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i F_i(a_0, \ldots, a_n).$$

Observe que λ é raiz do polinômio $G(y) = \sum_{i=0}^{n} F_i(a_0, \ldots, a_n) y^i \in k[y]$. Em virtude de λ ser escolhido de forma arbitrária tem-se $G(y)$ com infinitas raízes portanto $G(y) = 0$. Desse modo, concluindo que $F_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, isto é, $F_i \in \mathcal{I}(S)$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Exemplo 1.9. Afirmo que $\mathcal{I}(S) = (y)$ com $S = \{(1 : 0)\} \subset \mathbb{P}^1$.

Observe que $(y) \subset \mathcal{I}(S)$ é imediata já que y anula-se em todos os pontos de S. Agora considere $h = \sum_{i=0}^{d} c_i y^i x^{d-i} \in \mathcal{I}(S)$ um de seus geradores. Então para $t = \frac{y}{x}$ tem-se que

$$\frac{h}{x^d} = \frac{\sum_{i=0}^{d} c_i y^i x^{d-i}}{x^d} = \sum_{i=0}^{d} c_i \left(\frac{y}{x}\right)^i = \sum_{i=0}^{d} c_i t^i \in k[t].$$

Como k é algebricamente fechado então $\frac{h}{x^d}$ é escrito como produto de polinômios irredutíveis de grau 1 em $k[t]$, isto é,

$$\frac{h}{x^d} = \sum_{i=0}^{d} c_i t^i = \prod_{i=0}^{d} (a_i + b_i t)$$

com $b_i \neq 0$. Portanto

$$h = x^d \frac{h}{x^d} = x^d \prod_{i=0}^{d} \left(a_i + b_i \frac{y}{x} \right) = \prod_{i=0}^{d} (a_i x + b_i y).$$

Daí,

$$h(1,0) = \prod_{i=0}^{d} a_i = 0$$

por consequência, $a_j = 0$ para algum $j \in \{0, \ldots, d\}$. Então

$$h = \prod_{i=0}^{d} (a_i x + b_i y) = \prod_{\substack{i \neq j \\ i=0}}^{d} (a_i x + b_i y) \cdot (a_j x + b_j y) = \prod_{\substack{i \neq j \\ i=0}}^{d} (a_i x + b_i y) \cdot b_j y \in (y).$$

Concluindo que $\mathcal{I}(S) = (y)$.

Definição 1.10 (Conjunto algébrico irredutível)**.** Um conjunto algébrico $S \subset \mathbb{P}^n$ não vazio é *irredutível* se para S_1 e S_2 conjuntos algébricos com $S = S_1 \cup S_2$ tem-se $S = S_1$ ou $S = S_2$. Caso contrario S é chamado de *redutível*.

Exemplo 1.11. O conjunto $S = \{(1:0)\} \subset \mathbb{P}^1$ é irredutível pois se $S = S_1 \cup S_2$ tem-se que pelo menos um dos conjuntos possui o único elemento de S concluindo que $S = S_1$ ou $S = S_2$.

Definição 1.12 (Variedade projetiva)**.** Uma *variedade projetiva* é um conjunto algébrico irredutível em $\mathbb{P}^n$.

Pelos exemplos 1.8 e 1.11 concluímos que o conjunto $S = \{(1:0)\} \subset \mathbb{P}^1$ é uma variedade projetiva.

A proposição a seguir relaciona elementos de geometria algébrica com os ideias de conjuntos no espaço projetivo $\mathbb{P}^n$.

Proposição 1.13. *Sejam V e W conjuntos finitos de formas e X, Y e Z conjuntos algébricos não vazios em $\mathbb{P}^n$. Então,*

1. *Se $V \subset W$ então $\mathcal{V}(W) \subset \mathcal{V}(V)$.*

2. *Se $X \subseteq Y$ então $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$. Se $X = X_1 \cup X_2$ então $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(X_1)$ e $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(X_2)$, em que X_1 e X_2 são conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^n$.*

3. *$V \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(V))$ e $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.*

4. *$\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(V))) = \mathcal{V}(V)$ e $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))) = \mathcal{I}(X)$. Então, como X é um conjunto algébrico, $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$; se I é um ideal de um conjunto algébrico, $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$.*

5. *$X = Y$ se, e somente se, $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y)$.*

Demonstração.

1. Seja $P \in \mathcal{V}(W)$, então $F(P) = 0$ para todo $F \in W$. Como $V \subset W$ então $G(P) = 0$ para todo $G \in V$. Logo $P \in \mathcal{V}(V)$.

2. Seja $F \in \mathcal{I}(Y)$ então $F(P) = 0$ para todo $P \in Y$. Como $X \subseteq Y$ então $F(P') = 0$ para todo $P' \in X$. Concluindo que $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$. Ademais, se $X = X_1 \cup X_2$ temos que $X_1, X_2 \subseteq X$ então $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(X_1)$ e $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(X_2)$.

3. Suponha que $V \nsubseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(V))$, isto é, existe $F \in V$ tal que $F \notin \mathcal{I}(\mathcal{V}(V))$. Então existe $P \in \mathcal{V}(V)$ tal que $F(P) \neq 0$ o que é um absurdo.

   Suponha que $X \nsubseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$, isto é, existe $P \in X$ tal que $P \notin \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$. Logo existe $F \in \mathcal{I}(X)$ tal que $F(P) \neq 0$ o que é um absurdo.

4. Observe que por (3) temos que $V \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(V))$ então por (1) concluímos que $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(V))) \subset \mathcal{V}(V)$. Agora suponha que $\mathcal{V}(V) \nsubseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(V)))$, isto é, existe $P \in \mathcal{V}(V)$ tal que $P \notin \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(V)))$. Então existe $F \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(V))$ que não se anula em P o que é um absurdo pois $P \in \mathcal{V}(V)$. Assim concluímos que $\mathcal{V}(V) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{V}(V)))$.

   Por (3) tem-se $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ então por (2) concluímos que $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))) \subseteq \mathcal{I}(X)$. Suponha que $\mathcal{I}(X) \nsubseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)))$, isto é, existe $F \in \mathcal{I}(X) \backslash \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)))$. Daí existe $P \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ que não anula F o que é um absurdo pois $F \in \mathcal{I}(X)$. Concluindo que $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)))$.

5. Se $X = Y$ então $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, pelo item (2) temos que $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{I}(Y)$ e $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$ concluindo que $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(Y)$.

□

O resultado a seguir relaciona conjuntos algébricos irredutíveis com os ideais primos.

Teorema 1.14. *Um conjunto algébrico $S \subset \mathbb{P}^n$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{I}(S)$ é um ideal primo.*

Demonstração. Suponha S irredutível, sejam $FG \in \mathcal{I}(S)$, S_1 o conjunto dos elementos de S que anulam F e S_2 o conjunto dos elementos de S que anulam G. Afirmamos que $S = S_1 \cup S_2$. De fato, se $P \in S$ temos que $(FG)(P) = F(P)G(P) = 0$ então $F(P) = 0$ ou $G(P) = 0$, isto é, $P \in S_1$ ou $P \in S_2$. Como $S = S_1$ ou $S = S_2$ segue que $F \in \mathcal{I}(S)$ ou $G \in \mathcal{I}(S)$.

Suponha que $\mathcal{I}(S)$ é ideal primo e que $S = S_1 \cup S_2$ com S_1 e S_2 conjuntos algébricos em $\mathbb{P}^n$. Por (2) da proposição 1.13 tem-se $\mathcal{I}(S) \subseteq \mathcal{I}(S_1)$. Se $\mathcal{I}(S) = \mathcal{I}(S_1)$ nada temos que mostrar pelo item (5) da proposição 1.13. Suponha que $\mathcal{I}(S) \subsetneq \mathcal{I}(S_1)$, considere $F \in \mathcal{I}(S_1) \backslash \mathcal{I}(S)$. Então $FG \in \mathcal{I}(S)$ para todo $G \in \mathcal{I}(S_2)$. Por hipótese e pela forma que consideramos F concluímos que $G \in \mathcal{I}(S)$, ou seja, $\mathcal{I}(S_2) \subseteq \mathcal{I}(S)$ então pelos itens (2) e (5) da proposição 1.13 concluímos que $S = S_2$. $\square$

Exemplo 1.15. Para $S = \{(1:0)\} \in \mathbb{P}^1$ temos que $\mathcal{I}(S) = (y)$ é um ideal primo.

Definição 1.16 (Anel de Coordenadas Homogêneas)**.** Seja S uma variedade projetiva de $\mathbb{P}^n$. Então o anel quociente $A(S) := {}^{k[x_0,\dots,x_n]}/_{\mathcal{I}(S)}$ é chamado o *anel de coordenadas homogêneas de S*.

Fazendo uma análise sobre a definição 1.16 e sobre o teorema 1.14 concluímos que um conjunto algébrico $S \in \mathbb{P}^n$ é irredutível se, e somente se, $A(S)$ é um domínio.

2 Isaac Newton

Isaac Newton foi um matemático e físico inglês nascido em 4 janeiro 1643 em Woolsthorpe, Lincolnshire, England. Ingressou na universidade de Cambridge em junho de 1661. Segundo Abraham de Moivre o interesse de Newton pela matemática começou no outono de 1663 sob influência do livro *Os Elementos* de Euclides, porém suspeita-se que Newton já tinha lido Euclides alguns anos antes. Em abril de 1664 foi eleito acadêmico e um ano depois recebeu seu diploma de bacharel. Foi eleito membro da *Royal Society* e em 1703 tornou-se presidente.

O objetivo desse capítulo é definir e estudar o dual complementar de Newton.

2.1 Dual complementar de Newton

Sejam k algebricamente fechado e $R = k[x_0, \dots, x_n]$, $G = a\, x_0^{v_0} \dots x_n^{v_m}$ um monômio em R. Então definimos o *vetor expoente* de G como $(v_0, \dots, v_m) \subset \mathbb{N}^n$. Além disso, definimos o *conjunto-log* de um polinômio $G = \sum a_i x_0^{v_{i_0}} \dots x_m^{v_{i_m}}$ como o conjunto dos vetores expoentes de suas parcelas.

Definição 2.1. Seja f uma forma de grau $d \geq 1$ em R. Denotamos por $N(f)$ a matriz cujas colunas são os vetores expoentes dos termos não nulos de f em uma ordem fixada. A matriz $N(f)$ é chamada de *matriz-log (ou matriz de Newton)* de f. Desse modo, dado um conjunto finito ordenado $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$ com $m \geq 0$, de formas de mesmo grau $d \geq 1$, definimos $N(\mathbf{f})$ como a concatenação das matrizes de Newton $N(f_0), \dots, N(f_m)$. A matriz $N(\mathbf{f})$ é chamada *a matriz de Newton do conjunto f.*

Exemplo 2.2. Seja $\mathbf{f} = \{xy, x^2 - yz, 2z^2\}$ um conjunto de formas de grau 2 em $k[\mathbf{x}] = k[x, y, z]$ então podemos fazer a seguinte associação:

$$\begin{cases} f_0 = xy & \leftrightarrow \quad \mathbf{x}^{(1,1,0)} \\ f_1 = x^2 - yz & \leftrightarrow \quad \mathbf{x}^{(2,0,0)}, \ \mathbf{x}^{(0,1,1)} \\ f_2 = 2z^2 & \leftrightarrow \quad \mathbf{x}^{(0,0,2)}. \end{cases}$$

Então $(1, 1, 0)$ é o vetor expoente de f_0, $(2, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são vetores expoentes de f_1 e $(0, 0, 2)$ é o vetor expoente de f_2. Portanto as matrizes de Newton de f_0, f_1 e f_2 são

$$N(f_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ N(f_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } N(f_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Visto que $N(\mathbf{f})$ é a concatenação das matrizes $N(f_i)$ tem-se

$$N(\mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz é dita *estocástica* se todas as entradas são não-negativas e todas as colunas têm a soma de suas entradas iguais. Observe que $N(\mathbf{f})$ é uma matriz estocástica já que $\mathbf{f}$ é um conjunto de formas de grau d e os vetores expoentes das formas f_i têm coordenadas não-negativas.

Definimos c_f como o vetor cujas as entradas são os coeficientes não nulos de uma forma f em uma ordem fixada, e chamado de *quadro de coeficientes* de f. Podemos escrever f da maneira simbólica

$$f = < c_f, \mathbf{x}^{N(f)} > .$$

Essa notação é chamada de *representação de Newton* de f.

Exemplo 2.3. Para o conjunto de formas definidos no exemplo 2.2, tem-se $c_{f_0} = (1),\ c_{f_1} = (1, -1)$ e $c_{f_2} = (2)$ como seus quadros de coeficientes. Então a representação de Newton das formas $f_0,\ f_1$ e f_2 são

$$f_0 = < (1), \mathbf{x}^{(1,1,0)} >,\ f_1 = < (1, -1), (\mathbf{x}^{(2,0,0)}, \mathbf{x}^{(0,1,1)}) > \text{ e } f_2 = < (2), \mathbf{x}^{(0,0,2)} > .$$

A *matriz dual complementar de Newton* de $N(\mathbf{f}) = (a_{i,l})$ é a matriz definida como

$$\widehat{N(\mathbf{f})} := (\alpha_i - a_{i,l}),$$

em que, para todo $i \in \{0 \ldots n\}$ tem-se $\alpha_i = \max_l \{a_{i,l}\}$, com l indexando o conjunto dos termos não nulos de todas as formas de $\mathbf{f}$. De outro modo, denotando $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^t$, então

$$\widehat{N(\mathbf{f})} = [\alpha| \ldots |\alpha]_{n \times (r_0 + \cdots + r_m)} - N(\mathbf{f})$$

no qual r_j representa o número de termos não nulos de f_j, com $j \in \{0, \ldots, m\}$. O vetor α é chamado de *vetor diretriz* de $N(\mathbf{f})$.

Para todo $j = 0, \ldots, m$, definimos $\widehat{N(\mathbf{f})}_j$ como a submatriz de $\widehat{N(\mathbf{f})}$ em que as colunas são oriundas de f_j.

Definição 2.4. Seja $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset R$ um conjunto de formas de grau $d \geq 1$. Definimos o *dual complementar de Newton de* $\mathbf{f}$ como

$$\widehat{\mathbf{f}} := \{\widehat{f_0} := < c_{f_0}, \mathbf{x}^{\widehat{N(\mathbf{f})}_0} >, \ldots, \widehat{f_m} := < c_{f_m}, \mathbf{x}^{\widehat{N(\mathbf{f})}_m} >\}.$$

Exemplo 2.5. Para o conjunto de formas definido no exemplo 2.2 tem-se

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= max\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}\} = max\{1, 2, 0, 0\} = 2\\ \alpha_2 &= max\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}\} = max\{1, 0, 1, 0\} = 1\\ \alpha_3 &= max\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}\} = max\{0, 0, 1, 2\} = 2\end{aligned}$$

portanto o vetor diretriz de $N(\mathbf{f})$ é $\alpha = (2, 1, 2)$. Consequentemente

$$\widehat{N(\mathbf{f})} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\widehat{N(\mathbf{f})}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \widehat{N(\mathbf{f})}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \widehat{N(\mathbf{f})}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então o complementar dual de Newton de $\mathbf{f}$ é dado por

$$\hat{\mathbf{f}} = \{< c_{f_0}, \mathbf{x}^{(1,0,2)} >, < c_{f_1}, (\mathbf{x}^{(0,1,2)}, \mathbf{x}^{(2,0,1)}) >, < c_{f_2}, \mathbf{x}^{(2,1,0)} >\} = \{xz^2, yz^2 - x^2z, x^2y\}.$$

Proposição 2.6. *Seja $f \in R$ uma forma arbitrária de grau $d \geq 1$ e $\widehat{f}$ seu dual complementar de Newton. Então*

$$f(\widehat{\mathbf{x}}) = x_0^{d-\beta_0} \dots x_n^{d-\beta_n} \widehat{f},$$

em que $\widehat{\mathbf{x}}$ é o dual complementar do conjunto $\mathbf{x} := \{x_0, \dots, x_n\}$ e $\beta := (\beta_0, \dots, \beta_n)^t$ é o vetor diretriz de $N(f)$.

Demonstração. Suponha que $f = \sum_{i=0}^{m} c_i x_0^{\alpha_{i0}} \dots x_n^{\alpha_{in}}$ em que $\alpha_{i0} + \dots + \alpha_{in} = d$ para todo $i \in \{0, \dots, m\}$ e $m + 1$ é a quantidade de termos não nulos de f. Então

$$f(\widehat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=0}^{m} c_i (x_1 \dots x_n)^{\alpha_{i0}} \dots (x_0 \dots x_{n-1})^{\alpha_{in}} = \sum_{i=0}^{m} c_i x_0^{\alpha_{i1}+\dots+\alpha_{in}} \dots x_n^{\alpha_{i0}+\dots+\alpha_{in-1}}.$$

Logo, observando a matriz-log de $f(\widehat{\mathbf{x}})$ tem-se

$$N(f(\widehat{\mathbf{x}})) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{0j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} \\ \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n} \alpha_{0j} & \dots & \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{n} \alpha_{mj} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{0j} & \dots & \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \dots & \alpha_{m0} \\ \alpha_{01} & \dots & \alpha_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{0n} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = N(\widehat{\mathbf{x}}) \cdot N(f).$$

Além disso, observe que os coeficientes de $f(\widehat{\mathbf{x}})$ e de $x_0^{d-\beta_0} \dots x_n^{d-\beta_n} \widehat{f}$ são iguais já que apenas as potências das indeterminadas são alteradas. Então basta mostrar que

$$N(f(\widehat{\mathbf{x}})) = N(x_0^{d-\beta_0} \dots x_n^{d-\beta_n} \widehat{f}).$$

Note que
$$N(x_0^{d-\beta_0}\dots x_n^{d-\beta_n}\widehat{f}) = [\alpha|\dots|\alpha]_{(n+1)\times(m+1)} + \widehat{N(f)},$$
em que $\alpha = (d-\beta_0,\dots,d-\beta_n)^t$. A igualdade ocorre, visto que, ao multiplicarmos os termos de $\widehat{f}$ por $x_0^{d-\beta_0}\dots x_n^{d-\beta_n}$ estamos alterando apenas o grau dos termos não nulos de $\widehat{f}$. Agora nosso objetivo é mostrar que
$$N(\widehat{\mathbf{x}})\cdot N(f) = [\alpha|\dots|\alpha]_{(n+1)\times(m+1)} + \widehat{N(f)}.$$

Sabendo que o vetor diretriz de $\mathbf{x}$ é $\gamma = (1,\dots,1)^t$. Então
$$N(\widehat{\mathbf{x}})\cdot N(f) = (\mathbb{I} - N(\mathbf{x}))\cdot N(f) = \mathbb{I}\cdot N(f) - N(\mathbf{x})\cdot N(f) = \mathbb{I}\cdot N(f) - N(f)$$
uma vez que $N(\mathbf{x})$ é a matriz identidade de tamanho $(n+1)\times(n+1)$ e $\mathbb{I} = [\gamma|\dots|\gamma]_{(n+1)\times(n+1)}$. Portanto,
$$N(\widehat{\mathbf{x}})\cdot N(f) = \mathbb{I}\cdot N(f) - [\beta|\dots|\beta] + [\beta|\dots|\beta] - N(f) = \mathbb{I}\cdot N(f) - [\beta|\dots|\beta] + \widehat{N(f)}.$$
Como $\mathbb{I}\cdot N(f) = d\cdot\mathbb{I}$ então
$$N(f(\widehat{\mathbf{x}})) = N(\widehat{\mathbf{x}})\cdot N(f) = d\cdot\mathbb{I} - [\beta|\dots|\beta] + \widehat{N(f)} = [\alpha|\dots|\alpha]_{(n+1)\times(m+1)} + \widehat{N(f)}.$$

Portanto $N(f(\widehat{\mathbf{x}})) = N(\widehat{\mathbf{x}})\cdot N(f) = N(x_0^{d-\beta_0}\dots x_n^{d-\beta_n}\widehat{f})$ concluindo a demonstração.
□

Exemplo 2.7. Considere $f = x^2 - yz \in k[x,y,z]$ e $\widehat{\mathbf{x}} := \{yz, xz, xy\}$. Observe que $\widehat{f} = yz - x^2$. Então
$$f(yz,xz,xy) = (yz)^2 - xzxy = yz(yz - x^2) = yz\widehat{f}.$$

Observe que se $f, g \in R$ são formas de grau r e s respectivamente então $\widehat{fg} = \widehat{f}\widehat{g}$. De fato, sejam $\alpha = (\alpha_0,\dots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_0,\dots,\beta_n)$ e $\gamma = (\gamma_0,\dots,\gamma_n)$ os vetores diretrizes de $N(f), N(g)$ e $N(fg)$ respectivamente. Então,
$$\prod_{i=0}^{n} x_i^{r+s-\gamma_i}\widehat{fg} = (fg)(\widehat{\mathbf{x}}) = f(\widehat{\mathbf{x}})g(\widehat{\mathbf{x}}) = \prod_{i=0}^{n} x_i^{r-\alpha_i}\widehat{f}\prod_{i=0}^{n} x_i^{s-\beta_i}\widehat{g} = \prod_{i=0}^{n} x_i^{r+s-\alpha_i-\beta_i}\widehat{f}\widehat{g} = \prod_{i=0}^{n} x_i^{r+s-\gamma_i}\widehat{f}\widehat{g},$$
ou seja, o dual do produto é o produto do dual.

Definição 2.8. Um conjunto de formas $\mathbf{f} = \{f_0,\dots,f_m\} \subset k[x_0,\dots,x_n]$ satisfaz a *restrição canônica* se para todo $i \in \{0,\dots,m\}$ temos que x_i não divide $MDC(f_0,\dots,f_m)$ e toda variável x_i aparece em ao menos uma forma f_j com $0 \leq j \leq m$.

A restrição canônica pode ser traduzida na matriz de Newton como em cada linha tem ao menos um elemento nulo e ao menos um elemento não nulo. Essa observação é importante para a demonstração do resultado a seguir.

Proposição 2.9. *Se* $\mathbf{f}$ *satisfaz a restrição canônica então, o mesmo acontece com* $\widehat{\mathbf{f}}$*. Ademais* $\widehat{\widehat{\mathbf{f}}} = \mathbf{f}$*.*

Demonstração. Seja $N(\mathbf{f}) = [a_{ij}]$ e $N(\widehat{\mathbf{f}}) = [b_{ij}]$ as matrizes de Newton de $\mathbf{f}$ e sua dual. Seja α_i o elemento máximo da i-ésima linha de $N(\mathbf{f})$ então $N(\widehat{\mathbf{f}}) = [\alpha_i - a_{ij}]$. Observe que se $a_{ij} = 0$ então $b_{ij} = \alpha_i$ e se $a_{ij} = \alpha_i$ tem-se $b_{ij} = 0$. Logo como $\mathbf{f}$ satisfaz a restrição canônica $\alpha_i \neq 0$ então $b_{ij} = 0$ e $b_{ik} \neq 0$ para todo i e para algum j e k concluindo que $\widehat{\mathbf{f}}$ também satisfaz a restrição canônica.

Como $\beta_i := \max_j\{b_{ij}\} = \max_j\{\alpha_i - a_{ij}\} = \alpha_i - \min_j\{a_{ij}\} = \alpha_i$ já que $\mathbf{f}$ satisfaz a restrição canônica e portanto possui um zero na j-ésima linha. Então

$$N(\widehat{\widehat{\mathbf{f}}}) = [\beta_i - b_{ij}] = [\alpha_i - (\alpha_i - a_{ij})] = [a_{ij}] = N(\mathbf{f}).$$

□

Uma k-álgebra é um homomorfismo, chamado de homomorfismo base, entre anéis $\phi : k \longrightarrow A$, referimos A como uma k-álgebra. Se A e B são k-álgebras, um homomorfismo de k-álgebras de A em B é um homomorfismo de anéis $\varphi : A \longrightarrow B$ satisfazendo também $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$, para todos $\lambda \in k$ e $a \in A$. O lema a seguir garante o isomorfismo entre $k[\mathbf{f}]$ e $k[\widehat{\mathbf{f}}]$ como k-álgebras no caso em que $\mathbf{f}$ é um conjunto de monômios satisfazendo a restrição canônica.

Lema 2.10. *Sejam* $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset R = k[x_0, \ldots, x_n]$ *monômios de grau* d *satisfazendo a restrição canônica e* $\widehat{\mathbf{f}}$ *denotamos o complemento dual de Newton. Então* $k[t_0, \ldots, t_m]$ *induz o isomorfismo entre* $k[\mathbf{f}]$ *e* $k[\widehat{\mathbf{f}}]$ *como* k*-álgebras.*

Demonstração. Observe que $P_{\mathbf{f}} = P_{\widehat{\mathbf{f}}}$ em $k[t_0, \ldots, t_m]$ em que $P_{\mathbf{f}}$ e $P_{\widehat{\mathbf{f}}}$ são ideais tóricos de $k[t_0, \ldots, t_m]$. De fato, basta observar que qualquer relação polinomial homogênea de $\mathbf{f}$ também é uma relação de $\widehat{\mathbf{f}}$, isto é, se $\mathbf{t}^\beta - \mathbf{t}^\gamma \in k[t_0, \ldots, t_m]$ com $|\beta| = |\gamma|$ então

$$\prod_j f_j^{\beta_j} = \prod_j f_j^{\gamma_j} \Leftrightarrow \frac{\prod_j (\mathbf{x}^\alpha)^{\beta_j}}{\prod_j f_j^{\beta_j}} = \frac{\prod_j (\mathbf{x}^\alpha)^{\gamma_j}}{\prod_j f_j^{\gamma_j}} \Leftrightarrow \prod_j \left(\frac{\mathbf{x}^\alpha}{f_j}\right)^{\beta_j} = \prod_j \left(\frac{\mathbf{x}^\alpha}{f_j}\right)^{\gamma_j},$$

sendo que α é o vetor diretriz de $\mathbf{f}$. Observe que no caso monomial $\widehat{f_j} = \frac{\mathbf{x}^\alpha}{f_j}$ e portanto

$$\prod_j f_j^{\beta_j} = \prod_j f_j^{\gamma_j} \Leftrightarrow \prod_j \widehat{f_j}^{\beta_j} = \prod_j \widehat{f_j}^{\gamma_j}.$$

Segue do teorema do isomorfismo temos que

$$k[\mathbf{f}] \simeq \frac{k[t_0, \ldots, t_m]}{P_{\mathbf{f}}} = \frac{k[t_0, \ldots, t_m]}{P_{\widehat{\mathbf{f}}}} \simeq k[\widehat{\mathbf{f}}].$$

□

Teorema 2.11. *Seja* $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset R = k[x_0, \ldots, x_n]$ *formas de mesmo grau satisfazendo a restrição canônica. Então* $k[y_0, \ldots, y_m]$ *induz um isomorfismo entre* $k[\mathbf{f}]$ *e* $k[\widehat{\mathbf{f}}]$ *como* k*-álgebras onde* $y_0, \ldots, y_m$ *são indeterminadas sobre* k*.*

Demonstração. Segundo a definição 2.4 podemos escrever $f_j =< c_{f_j}, \mathbf{x}^{N(f_j)} >$, para todo $j \in \{0, \ldots, m\}$ em que $c_j = (c_{j,1}, \ldots, c_{j,r_j})$, então $f_j =< c_{f_j}, \mathbf{x}^{N(f_j)} >= \sum_{l=0}^{r_j} c_{j,l} M_{j,l}$ com $M_{j,l}$ monômio. Então $\widehat{\mathbf{f}} = \left\{ \widehat{f_0} = \sum_{l=0}^{r_0} c_{0,l} \widehat{M_{0,l}}, \ldots, \widehat{f_m} = \sum_{l=0}^{r_m} c_{m,l} \widehat{M_{m,l}} \right\}$.

Seja $\{z_{j,1}, \ldots, z_{j,r_j}\}$, com $j = \{0, \ldots, m\}$ um conjunto de indeterminadas. Então pelo lema 2.10 tem-se que $k[z_{j,1}, \ldots, z_{j,r_j},\ 0 \leq j \leq m]$ induz um isomorfismo entre $k[\mathbf{M}] := k[M_{j,1}, \ldots, M_{j,r_j},\ 0 \leq j \leq m]$ e $k[\widehat{\mathbf{M}}] := k[\widehat{M_{j,1}}, \ldots, \widehat{M_{j,r_j}},\ 0 \leq j \leq m]$. Então definimos $y_j = \sum_{i=0}^{r_j} c_{j,i} z_{j,i}$, com $0 \leq j \leq m$. Observe que $y_0, \ldots, y_m$ são elementos algebricamente independentes de k uma vez que cada $z_{j,i}$ aparece apenas em y_j. Então a restrição do mapa anterior diz que o mapa identidade do anel de polinômios $k[y_0, \ldots, y_m]$ induz um isomorfismo entre $k[\mathbf{f}]$ e $k[\widehat{\mathbf{f}}]$. $\square$

3 Antonio Cremona

Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona foi um matemático e político italiano nascido em 7 de dezembro de 1830 em Pavia, Lombardia. Ingressou na universidade de Pavia em 27 de novembro de 1849 para estudar engenharia civil e teve como principal influência Francesco Brioschi. Concluiu seu doutorado em engenharia civil em maio de 1853. Em 1860 foi nomeado, por decreto real, professor ordinário na Universidade de Bolonha e durante sua vida acadêmica desenvolveu a teoria das transformações birracionais, mais tarde conhecidas como transformações de Cremona.

Esse Capítulo tem como objetivo estudar o que são mapas racionais, birracionais e de Cremona e as relações entre o dual complementar de Newton e a birracionalidade.

3.1 Mapas Racionais, Birracionais e de Cremona

Sejam k corpo algebricamente fechado e $R = k[x_0, \dots, x_n]$. Um *mapa racional* de uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ em $\mathbb{P}^m$ é obtida considerando a $(m+1)$-upla $\mathfrak{F}(x) = (f_0(x) : \cdots : f_m(x))$ de formas de mesmo grau em R e denotamos por $\mathfrak{F} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$.

Além disso a seta "$\dashrightarrow$" é tracejada para representar que o mapa não está definido no conjunto $\mathcal{V}(f_0, \dots, f_m) \subset \mathbb{P}^n$.

Exemplo 3.1. O conjunto $\mathbf{f} = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3\}$ define o seguinte mapa racional

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{F}: & \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) & \mapsto & (x_0x_1 : x_1x_2 : x_2x_3). \end{array}$$

Definição 3.2. Dois conjuntos de formas $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$ e $\mathbf{f}' = \{f'_0, \dots, f'_m\}$ são representantes de um mesmo mapa racional se, e somente se, o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} f_0 & \dots & f_m \\ f'_0 & \dots & f'_m \end{pmatrix}$$

é o ideal nulo. Em outras palavras, representantes de um mesmo mapa racional se, e somente se,

$$I_2 \begin{bmatrix} f_0 & \dots & f_m \\ f'_0 & \dots & f'_m \end{bmatrix} = 0$$

em que $I_t(M)$ denota o ideal de R gerado pelos menores $t \times t$ da matriz M.

Em outras palavras podemos traduzir a definição 3.2 como **f** e **f'** representam o mesmo mapa racional quando o posto da matriz anterior é igual a 1. Mais ainda, se **f** e **f'** representam o mesmo mapa racional então $\frac{f_i}{f'_i} = \frac{f_j}{f'_j} = \lambda$ para todo $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ com $\lambda \in frac(R)$.

Um mapa racional $\mathfrak{F}$ admite um representante em que as formas não possuem fator irredutível comum. De fato, se $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\}$ é um representante de $\mathfrak{F}$ considere $\lambda = MDC(f_0, \ldots, f_m)$ e defina $g_i = f_i/\lambda$ tal que $i \in \{0, \ldots, m\}$. Dessa forma $MDC(g_0, \ldots, g_m) = 1$. A matriz

$$M = \begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_m \\ g_0 & \cdots & g_m \end{pmatrix}$$

tem $rank(M) = 1$ concluindo que $\mathbf{g} = \{g_0, \ldots, g_m\}$ é um representante de $\mathfrak{F}$ tal que $MDC(g_0, \ldots, g_m) = 1$. Ademais um mapa racional $\mathfrak{F}$ não possui um único representante.

Pensando nos representantes um mapa racional $\mathfrak{F}$ tal que o MDC do conjunto das formas é 1 é importante verificar que o grau desses representante é um invariante em $\mathfrak{F}$. Com efeito, sejam $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ representantes de $\mathfrak{F}$ tais que $MDC(f_0, \ldots, f_m) = MDC(g_0, \ldots, g_m) = 1$ e $gr(f_i) = d$ e $gr(g_i) = d'$, para todo i. Como $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são representantes do mesmo mapa racional então $(f_0, \ldots, f_m) = \lambda(g_0, \ldots, g_m)$, em que $\lambda \in frac(R)$, ou seja, $\lambda = p/q$ em que $p, q \in R$ e $MDC(p, q) = 1$. Logo $q(f_0, \ldots, f_m) = p(g_0, \ldots, g_m)$, isto é, $q \mid pg_i$ concluindo que $q \mid 1$. Analogamente concluímos que $p \mid 1$, então $p, q \in k$. Por consequência λ é constante, isto é, $gr(\mathbf{f}) = gr(\mathbf{g})$.

Seja $\mathbf{f}$ um representante de $\mathfrak{F}$ tal que $MDC(f_0, \ldots, f_m) = 1$ e $gr(f_i) = d$ para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$. Então para todo representante $\mathbf{g}$ de $\mathfrak{F}$ inferimos $gr(f_i) \leq gr(g_i)$. De fato, defina $h_i = g_i/\lambda$ com $\lambda = MDC(g_0, \ldots, g_m)$, logo $gr(\lambda) + gr(h_i) = gr(g_i)$. Desse modo $d = gr(f_i) = gr(h_i) \leq gr(g_i)$. Intitulamos d como *grau de* $\mathfrak{F}$.

Exemplo 3.3. O conjunto de formas $\mathbf{g} = \{x_0^2x_1, x_0x_1x_2, x_0x_2x_3\}$ é um representante de $\mathfrak{F}$ definido no exemplo 3.1, pois a matriz

$$M = \begin{pmatrix} x_0x_1 & x_1x_2 & x_2x_3 \\ x_0^2x_1 & x_0x_1x_2 & x_0x_2x_3 \end{pmatrix}.$$

tem posto 1.

Tal como em funções reais, podemos definir o que vem a ser a *imagem* de um mapa racional.

Definição 3.4 (Imagem de um mapa racional)**.** A *imagem* de um mapa racional $\mathfrak{F} = (f_0 : \cdots : f_m)$ é a subvariedade projetiva $W \subset \mathbb{P}^m$ em que o anel de coordenadas homogêneas é um k-subálgebra $k[f_0, \ldots, f_m] \subset R$. Escrevemos $S := k[f_0, \ldots, f_m] \simeq k[Y_0, \ldots, Y_m]/\mathcal{I}(W)$ em que $Y_0, \ldots, Y_m$ são as *novas coordenadas homogêneas*.

Apesar de existir uma definição da imagem de um mapa racional no cenário da geometria algébrica, para este trabalho é suficiente a definição de imagem no contexto de álgebra comutativa.

Dado $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ e $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dois mapas racionais com representantes $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_m\}$ e $\mathbf{g} = \{g_0, \dots, g_n\}$, respectivamente, definimos a composição de mapas racionais como o mapa representado por $\{f_0(\mathbf{g}), \dots, f_m(\mathbf{g})\}$ e denotamos por $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$.

Definição 3.5 (mapa birracional)**.** Seja $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ um mapa racional cuja imagem $W \subset \mathbb{P}^m$. Dizemos que $\mathfrak{F}$ é um mapa *birracional* se existe um mapa racional $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ com imagem $\mathbb{P}^n$ tal que $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G}$ e $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F}$ são mapas identidades de W e $\mathbb{P}^n$ respectivamente, isto é, $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{G} = (\lambda_1 x_0 : \cdots : \lambda_1 x_n)$ e $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{F} = (\lambda_2 x_0 : \cdots : \lambda_2 x_m)$ em que $\lambda_1, \lambda_2 \in frac(R)$.

O mapa $\mathfrak{G}$ declarado na definição 3.5 é chamado de *mapa inversa de* $\mathfrak{F}$. Além disso, λ_1 e λ_2 são chamados de *fator de inversão*. Observe que no caso em que $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{G}$ são definidos por monômios o fator de inversão também é um monômio.

Proposição 3.6. *Seja $\mathfrak{F} = (f_0 : \cdots : f_m)$ um mapa racional em que $f_i \in R$ são formas de grau $d \geq 1$. Então $\mathfrak{F}$ é um mapa birracional se, e somente se, $k(\mathbf{f}) = k(X_d)$.*

Demonstração. Suponha que $\mathfrak{F}$ seja birracional então existe $\mathfrak{G} = (g_0 : \cdots : g_n)$ tal que $g_i(\mathbf{f}) := g_i(f_0, \dots, f_m) = \lambda x_i$. Como $\mathbf{f} \subset X_d$ então $k[\mathbf{f}] \subset k[X_d]$ o que implica em $k(\mathbf{f}) \subset k(X_d)$. Resta verificar que $k(X_d) \subset k(\mathbf{f})$. Note que

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{\lambda x_i}{\lambda x_0} = \frac{g_i(\mathbf{f})}{g_0(\mathbf{f})} \in k(\mathbf{f}).$$

Ademais, se $f_0 = \sum x_0^{\alpha_{i_0}} \dots x_n^{\alpha_{i_n}}$ tal que $\alpha_{i_0} + \cdots + \alpha_{i_n} = d$ então

$$\frac{f_0}{x_0^d} = \frac{\sum x_0^{\alpha_{i_0}} \dots x_n^{\alpha_{i_n}}}{x_0^{\alpha_{i_0} + \cdots + \alpha_{i_n}}} = \sum \left(\frac{x_0}{x_0}\right)^{\alpha_{i_0}} \cdots \left(\frac{x_n}{x_0}\right)^{\alpha_{i_n}} = \sum \left(\frac{g_1(\mathbf{f})}{g_0(\mathbf{f})}\right)^{\alpha_{i_1}} \cdots \left(\frac{g_n(\mathbf{f})}{g_0(\mathbf{f})}\right)^{\alpha_{i_1}}$$

portanto

$$x_0^d = \frac{f_0}{\sum \left(\frac{g_1(\mathbf{f})}{g_0(\mathbf{f})}\right)^{\alpha_{i_1}} \cdots \left(\frac{g_n(\mathbf{f})}{g_0(\mathbf{f})}\right)^{\alpha_{i_n}}} \in k(\mathbf{f}).$$

Segue que $k(\mathbf{f}) = k(x_0^d, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) = k(X_d)$.

Suponha que $k(X_d) = k(\mathbf{f})$ então existe $g_i, g_i' \in R$ tal que

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{g_i(\mathbf{f})}{g_i'(\mathbf{f})}, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Sejam $G_0 = \prod_{i=1}^{n} g_i'$ e $G_i = \frac{g_i G_0}{g_i'}$. Note que $x_0 \mid G_0$ pois $x_i g_i' = x_0 g_i$. Definindo $\mathfrak{G} = (G_0 : \cdots : G_n)$ tem-se

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{F}) = (G_0(\mathbf{f}) : \cdots : G_n(\mathbf{f})) = \left(G_0(\mathbf{f}) : \frac{x_1}{x_0} G_0(\mathbf{f}) : \cdots : \frac{x_n}{x_0} G_0(\mathbf{f})\right) = \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \cdots : \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Ou seja, $\mathfrak{F}$ é birracional. □

Exemplo 3.7. O mapa $\mathfrak{F} = (xy : xz : yz)$ é um mapa birracional cujo sua inversa é ela própria. De fato,

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{F} = (x^2yz : xy^2z : xyz^2) = (x : y : z),$$

visto que a matriz

$$\begin{bmatrix} x^2yz & xy^2z & xyz^2 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

tem posto 1.

Definição 3.8 (mapa de Cremona)**.** Um mapa $\mathfrak{F} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ é um mapa de *Cremona* se $\mathfrak{F}$ é birracional. Denotamos o conjunto de todos os mapas de Cremona de $\mathbb{P}^n$ por $Cr_n(k)$.

Deste modo o mapa definido no exemplo 3.7 é um mapa de Cremona porém o mapa definido no exemplo 3.3 não é.

3.2 Birracionalidade e Dual Complementar de Newton

A pergunta natural que podemos fazer é o dual complementar de Newton preserva a birracionalidade? O teorema a seguir responde essa questão para o caso em que as formas são monômios de mesmo grau satisfazendo a restrição canônica.

Teorema 3.9. *Seja* $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset k[x_0, \ldots, x_m]$ *um conjunto de monômios de mesmo grau satisfazendo a restrição canônica. Se* $\mathbf{f}$ *define um mapa birracional sobre a imagem então o dual complementar de Newton* $\widehat{\mathbf{f}}$ *também define.*

Demonstração. Seja d o grau dos monômios de $\mathbf{f}$. Pela proposição 3.6 sabemos que

$$k(\mathbf{f}) = k(X_d) = k\left(x_0^d, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right)$$

.

Então para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ temos que

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{g_i(f_0, \ldots, f_m)}{g_i'(f_0, \ldots, f_m)},$$

em que g_i e g_i' são formas de grau s em $k[x_0, \ldots, x_m]$. Observe que é suficiente mostrar que

$$k(\widehat{\mathbf{f}}) = k(X_{|\alpha|-d}) = k\left(x_0^{|\alpha|-d}, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right)$$

em que $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_m$ é a norma do vetor diretriz e $\widehat{\mathbf{f}} = \{\widehat{f}_0, \ldots, \widehat{f}_m\}$. Então

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{g_i(f_0, \ldots, f_m)(x_0^{\alpha_0} \ldots x_m^{\alpha_m})^s}{g_i'(f_0, \ldots, f_m)(x_0^{\alpha_0} \ldots x_m^{\alpha_m})^s} = \frac{\frac{g_i(f_0, \ldots, f_m)}{(x_0^{\alpha_0} \ldots x_m^{\alpha_m})^s}}{\frac{g_i'(f_0, \ldots, f_m)}{(x_0^{\alpha_0} \ldots x_m^{\alpha_m})^s}}.$$

Como g_i e g_i' são formas de grau s e $\widehat{f}_i = \frac{x_0^{\alpha_0}\ldots x_m^{\alpha_m}}{f_i}$ temos que

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{g_i}{g_i'}\Big(\frac{f_0}{x_0^{\alpha_0}\ldots x_m^{\alpha_m}}, \ldots, \frac{f_m}{x_0^{\alpha_0}\ldots x_m^{\alpha_m}}\Big) = \frac{g_i}{g_i'}\Big(\frac{1}{\widehat{f_0}}, \ldots, \frac{1}{\widehat{f_m}}\Big).$$

Definindo $h_i(\widehat{\mathbf{f}}) := g_i\Big(\frac{1}{\widehat{f_0}}, \ldots, \frac{1}{\widehat{f_m}}\Big)$ e $h_i'(\widehat{\mathbf{f}}) := g_i'\Big(\frac{1}{\widehat{f_0}}, \ldots, \frac{1}{\widehat{f_m}}\Big)$ então

$$\frac{x_i}{x_0} = \frac{h_i(\widehat{\mathbf{f}})}{h_i'(\widehat{\mathbf{f}})} \in k(\widehat{f_0}, \ldots, \widehat{f_m}).$$

Agora considere $f_0 = x_{i_1}\ldots x_{i_d}$ com $0 < i_1 \leq \cdots \leq i_d$ então

$$\frac{f_0}{x_0^d} = \frac{x_{i_0}\ldots x_{i_d}}{x_0^d} = \frac{h_{i_0}(\widehat{\mathbf{f}})\ldots h_{i_d}(\widehat{\mathbf{f}})}{h_{i_0}'(\widehat{\mathbf{f}})\ldots h_{i_d}'(\widehat{\mathbf{f}})}$$

Por outro lado

$$\frac{f_0}{x_0^d} = \frac{f_0}{x_0^d}\frac{x_0^{|\alpha|}}{x_0^{|\alpha|}} = x_0^{|\alpha|-d}\frac{f_0}{x_0^{\alpha_0}\ldots x_n^{\alpha_n}}\Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{x_n}{x_0}\Big)^{\alpha_n} = x_0^{|\alpha|-d}\frac{1}{\widehat{f_0}}\Big(\frac{h_1(\widehat{\mathbf{f}})}{h_1'(\widehat{\mathbf{f}})}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{h_n(\widehat{\mathbf{f}})}{h_n'(\widehat{\mathbf{f}})}\Big)^{\alpha_n}.$$

Logo,

$$x_0^{|\alpha|-d} = \widehat{f_0}\frac{h_{i_0}(\widehat{\mathbf{f}})\ldots h_{i_d}(\widehat{\mathbf{f}})}{h_{i_0}'(\widehat{\mathbf{f}})\ldots h_{i_d}'(\widehat{\mathbf{f}})}\Big(\frac{h_1'(\widehat{\mathbf{f}})}{h_1(\widehat{\mathbf{f}})}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{h_n'(\widehat{\mathbf{f}})}{h_n(\widehat{\mathbf{f}})}\Big)^{\alpha_n}$$

Concluindo a demonstração. □

Exemplo 3.10. Observe que $\widehat{\mathfrak{F}} = (z : x : y)$ é a dual do mapa definido no exemplo 3.7 e define um mapa birracional conforme o teorema 3.9.

Teorema 3.11. *Seja* $\mathbf{f} = \{f_0, \ldots, f_m\} \subset R = k[x_0, \ldots, x_n]$ *formas de mesmo grau satisfazendo a restrição canônica. Se* $\mathbf{f}$ *define um mapa birracional sobre a imagem então* $\widehat{\mathbf{f}}$ *também define.*

Demonstração. Observando os corpos de frações com os isomorfismos definidos no teorema 2.11 podemos construir o seguinte diagrama de inclusões e isomorfismos.

$$\begin{array}{ccc} k(X_d) & & k(X_{|\alpha|-d}) \\ \cup & & \cup \\ k(\mathbf{M}) & \simeq & k(\widehat{\mathbf{M}}) \\ \cup & & \cup \\ k(\mathbf{f}) & \simeq & k(\widehat{\mathbf{f}}) \\ \| & & \\ k(X_d) & & \end{array}$$

Então pelo teorema 3.9 e pela proposição 3.6 temos que $k(\widehat{\mathbf{M}}) = k(X_{|\alpha|-d})$ logo $k(\widehat{\mathbf{f}}) \simeq k(\mathbf{f}) = k(\mathbf{M}) \simeq k(\widehat{\mathbf{M}}) = k(X_{|\alpha|-d})$ o que implica em $\widehat{\mathbf{f}}$ também define um mapa birracional sobre a imagem. □

Teorema 3.12. *Seja* $\mathbf{f} \subset R$ *um conjunto de* $n+1$ *monômios de mesmo grau satisfazendo a restrição canônica que define um mapa de Cremona em* $\mathbb{P}^n$*. Então* $(\widehat{\mathbf{f}})^{-1}$ *e* $\widehat{\mathbf{f}^{-1}}$ *representam o mesmo mapa.*

Demonstração. De acordo com o teorema 3.9, $\widehat{\mathbf{f}}$ também define um mapa de Cremona. Ademais por Simis and Villarreal [10, Teorema 2.2][1], dispomos da seguinte relação

$$N(\mathbf{f}) \cdot N(\mathbf{f}^{-1}) = \Gamma + I.$$

No qual Γ é a matriz quadrada de tamanho $n+1$ cujas colunas são o vetor diretriz γ do fator de inversão. Sejam $N(\mathbf{f}) = (a_{ij})$, $N(\mathbf{f}^{-1}) = (b_{ij})$, $\alpha_i = \max\{a_{i0}, \ldots, a_{in}\}$ e $\beta_i = \max\{b_{i0}, \ldots, b_{in}\}$. Então,

$$N(\widehat{\mathbf{f}}) \cdot N(\widehat{\mathbf{f}^{-1}}) = \left(\sum_{l=0}^{n} \widehat{a_{il}} \widehat{b_{lj}} \right) = \left(\sum_{l=0}^{n} (\alpha_i - a_{il})(\beta_l - b_{lj}) \right)$$

$$= \left(\alpha_i \sum_{l=0}^{n} \beta_l - \alpha_i \sum_{l=0}^{n} b_{lj} - \sum_{l=0}^{n} a_{il}\beta_l + \sum_{l=0}^{n} a_{il} b_{lj} \right).$$

Como $\sum_{l=0}^{n} b_{lj} = deg(\mathbf{f}^{-1}) = d'$ e $\sum_{l=0}^{n} a_{il} b_{lj} = \gamma_i + \delta_{ij}$ tem-se

$$N(\widehat{\mathbf{f}}) \cdot N(\widehat{\mathbf{f}^{-1}}) = \left(\alpha_i (\sum_{l=0}^{n} \beta_l - d') - \sum_{l=0}^{n} a_{il}\beta_l + \gamma_i \right) + I.$$

Considerando $\widehat{\gamma_i} = \alpha_i (\sum_{l=0}^{n} \beta_l - d') - \sum_{l=0}^{n} a_{il}\beta_l + \gamma_i$ então

$$N(\widehat{\mathbf{f}}) \cdot N(\widehat{\mathbf{f}^{-1}}) = [\widehat{\gamma}| \ldots |\widehat{\gamma}] + I = N(\widehat{\mathbf{f}}) \cdot N(\widehat{\mathbf{f}}^{-1}).$$

Onde a segunda igualdade decorre da unicidade de $\widehat{\gamma}$. Portanto $\widehat{\mathbf{f}^{-1}}$ e $\widehat{\mathbf{f}}^{-1}$ definem o mesmo mapa de Cremona. □

Com o teorema 3.12 concluímos que a inversa de $\widehat{\mathfrak{F}}$, com $\mathfrak{F}$ definida no exemplo 3.7, é ela mesma, visto que, $\mathfrak{F}$ é sua própria inversa.

[1] **Theorem 2.2.** *Let* $v_1, \ldots, v_n$ *be a set of vectors in* $\mathbb{N}^n$ *such that* $|v_i| \geq 1$ *for all* i *and* $det(A) = \pm d$*, where* A *is the* $n \times n$ *matrix with column vectors* $v_1, \ldots, v_n$*. Then there are unique vectors* $\beta_1, ..., \beta_n, \gamma \in \mathbb{N}^n$ *such that the following two conditions hold:*

(a) $A\beta_i = \gamma + e_i$ *for all* i*, where* β_i, γ *and* e_i *are regarded as column vectors;*

(b) The matrix B *whose columns are* $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *has at least one zero entry in every row.*

Moreover, $det(B) = \pm(|\gamma| + 1)/d = \pm|\beta_i|$ *for all* i*.*

4 De Jonquières

Ernest Jean Philippe Fauque de Jonquières foi um matemático e oficial da marinha nascido em 3 de julho de 1820 na Carpentras, uma comuna francesa na região administrativa da Provença-Alpes-Costa Azul, no departamento de Vaucluse. Quando Jonquières teve sua nomeação a almirante passou a residir em Paris no qual já tinha interesse nas obras de Jean Victor Poncelet e Michel Chasles e em 1852 colaborou com Chasles demonstrando conjecturas que o próprio Chasles propôs. Posteriormente, no ano de 1859, Jonquières introduziu o conceito de mapas birracional com os mapas Jonquières, que posteriormente foi estudado e generalizado por Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona.

O objetivo desse capítulo é estudar a relação entre mapas de Jonquières e o dual complementar de Newton.

4.1 Mapas de Jonquières

Sejam k corpo algebricamente fechado e $R = k[x_0, \ldots, x_n]$. Um *x_n-monóide* é uma d-forma $f = f_d + x_n f_{d-1} \in R$, em que f_{d-1} e f_d são formas de grau d e $d-1$ em $k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, respectivamente.

Lema 4.1. *Se $f \in R$ é um x_n-monóide então $\widehat{f}$ também é.*

Demonstração. Como f é x_n-monóide então $f = f_{d-1} + x_n f_d$ em que f_{d-1} e $f_d \in k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ são formas de grau $d-1$ e d respectivamente. Desse modo,

$$N(f) = \begin{bmatrix} N(f_d) & N(f_{d-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ o vetor diretriz de $N(\mathbf{f})$ no qual $\mathbf{f} = \{f_d, f_{d-1}\}$. Então,

$$N(\widehat{f}) = \begin{bmatrix} \alpha^t & \alpha^t \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N(f_d) & N(f_{d-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(\widehat{f_d}) & N(\widehat{f_{d-1}}) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto $\widehat{f} = x_n \widehat{f_d} + \widehat{f_{d-1}}$ no qual o grau de $\widehat{f_d}$ e $\widehat{f_{d-1}}$ são $|\alpha| - d$ e $|\alpha| - d + 1$ respectivamente concluindo o resultado. ☐

Definição 4.2. Um mapa de *Jonquières* é um mapa de Cremona da forma $\mathfrak{F} = (qg_0 : \cdots : qg_{n-1} : f)$ em que $(g_0 : \cdots : g_{n-1}) \in Cr_{n-1}(k)$ e $q, f \in R$ são x_n-monóides relativamente primos com, pelo menos, um deles com grau positivo em x_n.

O conjunto de todos os mapas de Jonquières de $\mathbb{P}^n$ é denotado por $J_o(1, \mathbb{P}^n)$. O mapa $(g_0 : \cdots : g_{n-1})$ é chamado de *mapa suporte* da aplicação de Jonquières. A hipótese de que f ou g ter grau positivo em x_n é imprescindível, pois caso contrário x_n não apareceria em nenhuma das formas que definem $\mathfrak{F}$ o que contradiz o fato de $\mathfrak{F} \in Cr_n(k)$.

Exemplo 4.3. O mapa de Cremona $\mathfrak{F} = (x : y : z)$ é um mapa de Jonquières $q = 1$ e $f = z$ com mapa suporte $\mathfrak{G} = (x : y)$. De fato, o mapa de Jonquières construído com q, f e $\mathfrak{G}$ é dado por $(x : y : z) = \mathfrak{F}$.

4.2 Dual Complementar de Newton e mapas de Jonquières

A questão que analisamos nessa sessão é a relação entre o dual complementar de Newton e os mapas de Jonquières. O teorema a seguir garante que o dual complementar de Newton de um mapa é preservado no conjunto dos mapas de Jonquières em $\mathbb{P}^n$.

Teorema 4.4. *Se* $\mathfrak{F} \in J_o(1, \mathbb{P}^n)$ *então* $\widehat{\mathfrak{F}} \in J_o(1, \mathbb{P}^n)$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{F} \in J_o(\mathbb{P}^n)$ um mapa de Jonquières representado por $\mathbf{f} = \{qg_0, \dots, qg_{n-1}, f\}$ em que $\mathbf{g} = \{g_0, \dots, g_{n-1}\}$ define um mapa de Cremona em $\mathbb{P}^{n-1}$ e $q, f \in R$ são x_n-monóides relativamente primos com, pelo menos, um deles tendo grau positivo em x_n. Desse modo, queremos mostrar que $\mathbf{f}$ e $\widehat{\mathbf{f}}$ tem mesma forma.

Considere $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ e $\delta = (\delta_0, \dots, \delta_n)$ os vetores diretrizes de $N(\mathbf{f})$, $N(\mathbf{g})$, $N(q)$ e $N(f)$ respectivamente. Suponha também que o grau de $\mathbf{f}$ e f seja d, o grau de $\mathbf{g}$ é s, o grau de q é r e $d = s + r$. Segundo a proposição 2.6 tem-se,

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{f}} &= (x_0^{d-\alpha_0} \dots x_n^{d-\alpha_n})^{-1} \mathbf{f}(\widehat{\mathbf{x}}) \\
&= (x_0^{\alpha_0 - d} \dots x_n^{\alpha_n - d}) \{q(\widehat{\mathbf{x}}) \mathbf{g}(\widehat{\mathbf{x}}), f(\widehat{\mathbf{x}})\} \\
&= (x_0^{\alpha_0 - d} \dots x_n^{\alpha_n - d}) \{(x_0^{r-\gamma_0} \dots x_n^{r-\gamma_n})(x_0^{s-\beta_0} \dots x_n^{s-\beta_n}) \widehat{q}\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{d-\delta_0} \dots x_n^{d-\delta_n}) \widehat{f}\} \\
&= \{(x_0^{\alpha_0 - \gamma_0 - \beta_0} \dots x_n^{\alpha_n - \gamma_n - \beta_n}) \widehat{q}\widehat{\mathbf{g}}, (x_0^{\alpha_0 - \delta_0} \dots x_n^{\alpha_n - \delta_n}) \widehat{f}\}
\end{aligned}.
$$

Como $\mathbf{g}$ define um mapa de Cremona, $\widehat{\mathbf{g}}$ também define um mapa de Cremona como consequência do teorema 3.11. Portanto resta mostrar que

$$
(x_0^{\alpha_0 - \gamma_0 - \beta_0} \dots x_n^{\alpha_n - \gamma_n - \beta_n}) \widehat{q} \text{ e } (x_0^{\alpha_0 - \delta_0} \dots x_n^{\alpha_n - \delta_n}) \widehat{f}
$$

são x_n-monóides relativamente primos. Observe que $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ são x_n-monóides relativamente primos. De fato, suponha que não, isto é, existe $h \in R$ tal que $h \mid \widehat{f}$ e $h \mid \widehat{q}$. Logo, $\widehat{f} = ha$ e $\widehat{q} = hb$, com $a, b \in R$. Porém $f = \widehat{ha} = \widehat{h}\widehat{a}$ e $q = \widehat{hb} = \widehat{h}\widehat{b}$, ou seja, f e q não são relativamente primos. Além disso, $\widehat{f}$ e $\widehat{q}$ são x_n-monóides segundo o lema 4.1.

Então basta analisar se $H = x_0^{\alpha_0 - \gamma_0 - \beta_0} \dots x_n^{\alpha_n - \gamma_n - \beta_n}$ e $G = x_0^{\alpha_0 - \delta_0} \dots x_n^{\alpha_n - \delta_n}$ são relativamente primos. Observe que $\beta_n = 0$ dado que é o máximo da matriz $N(\mathbf{g})$. Ademais

$\alpha_n = 1$, pois, o maior valor da última linha de $N(\mathbf{f})$ é 1 e $\alpha_i = \max\{\gamma_i + \beta_i, \delta_i\}$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ visto que as primeiras colunas de $N(\mathbf{f})$ são referentes a qg_i e a última é referente a f.

Observe que G e H não possuem fator irredutível em comum. Suponha, com efeito de contradição, que G e H possui fator comum irredutível, ou melhor, existe $x_i \in \{x_0, \ldots, x_n\}$ tal que $deg_G(x_i) > 0$ e $deg_H(x_i) > 0$. Portanto $\alpha_i - \delta_i > 0$ e $\alpha_i - \gamma_i - \beta_i > 0$. Portanto temos um absurdo já que $\alpha_i \geq \gamma_i + \beta_i$. Então G e H não possuem fator irredutível em comum. Além disso para verificar que $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \ldots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0} \ldots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}$ são x_n-monóides basta analisarmos a potência de x_n já que só poderá ter grau 1. Observe que $\delta_n = 1$ visto que $\alpha_n = 1, \beta_n = 0$ e f é um x_n-monóide. Fazendo a mesma análise para q concluímos que $\gamma_n = 1$. Então,

$$(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \ldots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q} = (x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \ldots x_n^{1-1-0})\widehat{q} = (x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\gamma_{n-1}-\beta_{n-1}})\widehat{q}$$

e

$$(x_0^{\alpha_0-\delta_0} \ldots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f} = (x_0^{\alpha_0-\delta_0} \ldots x_n^{1-1})\widehat{f} = (x_0^{\alpha_0-\delta_0} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\delta_{n-1}})\widehat{f}.$$

Então concluímos que $(x_0^{\alpha_0-\gamma_0-\beta_0} \ldots x_n^{\alpha_n-\gamma_n-\beta_n})\widehat{q}$ e $(x_0^{\alpha_0-\delta_0} \ldots x_n^{\alpha_n-\delta_n})\widehat{f}$ são x_n-monóide posto que x_n não é fator em G e H finalizando a demonstração. $\square$

Segundo o teorema 4.4 observamos que $\mathfrak{G} = (yz : xz : xy)$ é um mapa de Jonquières com mapa suporte $(x : y)$, $q = z$ e $f = xy$ uma vez que $\widehat{\mathfrak{G}} = (x : y : z)$ é um mapa de Jonquières segundo o exemplo 4.3.

Referências

[1] M. Alberich-Carramiñana. *Geometry of the plane Cremona maps.* Springer, 2004.

[2] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra.* CRC Press, 2018.

[3] B. Costa and A. Simis. New constructions of cremona maps. *Mathematical Research Letters*, 20:629–645, 2013.

[4] A.V. Doria and A. Simis. The newton complementary dual revisited. *Journal of Algebra and Its Applications*, 17(01):1850004, 2018.

[5] B. Herivelto e E. Tengan. *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos.* IMPA, 2015.

[6] W. Fulton. Algebraic curves. *An Introduction to Algebraic Geom*, page 54, 2008.

[7] E. Robertson and J. O'Connor. Mactutor history of mathematics archive, 2020. URL `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/`.

[8] R. S. Santos. Dual complementar de newton. 2019.

[9] A. Simis and R. H. Villarreal. Linear syzygies and birational combinatorics. *Resultate der Mathematik (Cessou em 1983. Cont. ISSN 1422-6383 Results in Mathematics)*, 48(3):326–343, 2005.

[10] A. Simis and R. H. Villarreal. Combinatorics of cremona monomial maps. *Mathematics of Computation*, 81(279):1857–1867, 2012.

[11] C. Urech. *Subgroups of Cremona groups.* PhD thesis, University_of_Basel, 2017.

[12] R. H. Villarreal. *Monomial Algebras.* Chapman and Hall/CRC Press, 2018.