



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE ENSINO DE GRADUAÇÃO EM EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA

**RELAÇÃO DE IGUALDADE E A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: um  
estudo sobre a implementação de orquestrações instrumentais on-line em  
uma aula remota**

RECIFE

2022

MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA

**RELAÇÃO DE IGUALDADE E A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: um estudo sobre a implementação de orquestrações instrumentais on-line em uma aula remota**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

**Orientadora:** Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elisângela Bastos de Mélo Espíndola

RECIFE  
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

A447r

Almeida, Matheus Souza de

RELAÇÃO DE IGUALDADE E A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: um estudo sobre a implementação de orquestrações instrumentais on-line em uma aula remota / Matheus Souza de Almeida. - 2022.  
77 f. : il.

Orientadora: Elisangela Bastos de Melo .  
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Licenciatura em Matemática, Recife, 2022.

1. Orquestração instrumental on-line. 2. Artefatos digitais. 3. Ensino remoto. 4. Estágio curricular supervisionado. 5. Álgebra escolar. I. , Elisangela Bastos de Melo, orient. II. Título

CDD 510

---

MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA

**RELAÇÃO DE IGUALDADE E A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: um estudo sobre a  
implementação de orquestrações instrumentais on-line em uma aula remota**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao curso de Licenciatura em Matemática da  
Universidade Federal Rural de Pernambuco,  
como requisito parcial para a obtenção do grau  
de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 09/06/2022.

**BANCA EXAMINADORA**

---

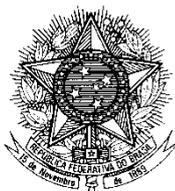
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elisângela Bastos de Mélo Espíndola (Orientadora e Presidente)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Anna Paula de Avelar Brito Lima (Examinadora Interna)  
Universidade Federal Rural de Pernambuco

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Examinadora Externa)  
Universidade Federal de Pernambuco



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
COORDENAÇÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**FICHA DE AVALIAÇÃO DA DISCIPLINA MONOGRAFIA**

1. IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO:

Nome: MATHEUS SOUZA DE ALMEIDA  
CPF: 709.106.254-09

2. TÍTULO DA MONOGRAFIA:

RELAÇÃO DE IGUALDADE E A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA: um estudo sobre a implementação de orquestrações instrumentais on-line em uma aula remota

3. BANCA EXAMINADORA:

1º Profa. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola (Orientadora – Presidente)

2º Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima (Examinadora Interna)

3º Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Examinado Externa)

4. PARÂMETROS DE AVALIAÇÃO DA MONOGRAFIA:

Comissão Examinadora	Domínio do assunto	Apresentação e redação	Defesa	Média por examinador
Profa. Dra. Elisângela Bastos de Melo Espíndola	10,0	10,0	10,0	10,0
Profa. Dra. Anna Paula de Avelar Brito Lima	10,0	10,0	10,0	10,0
Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira	10,0	10,0	10,0	10,0
Média final	10,0	10,0	10,0	10,0

5. MÉDIA FINAL: 10,0

Recife, 09 de junho de 2022.

À minha mãe, Karla Simone, mulher forte e esperançosa, que me ensinou a acreditar na Educação como via de possibilidades de ascensão pessoal e profissional.

À minha irmã Melyssa Almeida, meu “Mel”, minha melhor amiga e parceira de jornada, pela construção de uma relação de trocas saudáveis e afetuosas, a qual sei que encontro abrigo em quaisquer circunstâncias.

## AGRADECIMENTOS

Certamente, a construção desta monografia não se iniciou no curso do componente curricular, pois sua concepção perpassa toda minha formação inicial docente. Ao longo da minha trajetória acadêmica, fui atravessado por diversas pessoas generosas que auxiliaram no meu desenvolvimento profissional. Além dessas relações, pessoas não atreladas diretamente ao curso de Licenciatura em Matemática na UFRPE também alicerçaram a concretização deste trabalho, seja pelas palavras de incentivo seja pelos atos afetuosos. A todos eles, deixo os meus sinceros agradecimentos.

Sou grato sobretudo à Deus pela dádiva da vida, que sempre me fortalece em quaisquer circunstâncias.

À minha orientadora, Elisângela Espíndola, pelas orientações e ensinamentos desde o início da graduação. Ela me inspirou a desbravar o campo da Didática da Matemática: na primeira metade da graduação, contribuiu com a minha formação docente; na segunda metade da graduação, contribuiu com a minha formação científica. Seu compromisso e cuidado nos trabalhos acadêmicos nos possibilitaram conquistas importantes.

Agradeço à banca, constituída pelas professoras Anna Paula e Verônica Gitirana, grandes pesquisadoras do nosso estado, no campo da Educação Matemática. Pessoas humildes que conduzem com leveza as práticas investigativa e reflexiva.

À minha querida professora Mari Noeli Kiehl por acreditar em meu potencial e incentivar o meu desenvolvimento pessoal-profissional, particularmente na construção do meu acervo de livros na área Educação Matemática. Nosso encontro ocorreu no primeiro período na disciplina de “Produção de Textos Acadêmicos”, que se perdurou por meio das mensagens por e-mail e pelos diálogos nos corredores do CEGEN. Agradeço imensamente pelas trocas gentis e afetivas.

Ao professor Ross Nascimento, um grande e inspirador educador matemático, pela parceria e orientação nas pesquisas científicas. Ele oportunizou o meu intercâmbio na UFPE com outros pesquisadores, por meio do Grupo de Estudos em Recursos para a Educação (GERE). Sou grato aos integrantes do GERE pelo trabalho colaborativo e por contribuir com o meu amadurecimento científico, especialmente ao professor Rogério Ignácio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da minha bolsa no âmbito do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Ao Núcleo de Acessibilidade (NACES) da UFRPE por permitir ampliar minha visão sobre os processos de inclusão e acessibilidade na universidade durante minha

participação no programa monitor apoiador. À Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pelo suporte financeiro no seio do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica (PIBIC). Ao Laboratório Científico de Aprendizagem, Pesquisa e Ensino (LACAPE), pelo espaço para a realização de estudos.

Aos alunos e ao professor-supervisor da escola campo do estágio supervisionado, pois sem eles esse trabalho não seria produzido.

Aos meus companheiros de curso: Geane Lira, Sara Rocha, Rodrigo Silva, Maria Eduarda e Alaide Lima. Eles foram essenciais nesse processo formativo.

Aos meus familiares. Em particular, à minha irmã Melyssa Almeida, à minha mãe Karla Simone e à minha avó Maria Helena, mulheres fortes que são a minha base. Ao meu companheiro Italo Patrick pelo suporte nos momentos de escrita. Às minhas tias Kelma Sirleide e Katiane Cibele, por me inspirarem a seguir a carreira docente e me apoiarem nesse processo. À minha amiga Solange Santos, por se fazer presente nos momentos importantes e por sempre ser meu “Sol”, que me ilumina e me enche de afeto. À minha amiga Júlia Luz (*in memoriam*), “minha” professora de português e inglês, um presente que a vida me deu.

Aos insubordinados criativos, aos revolucionários, a todos que lutam contra à classe dominante e às desigualdades sociais existentes, em busca da emancipação coletiva. Em especial, aos que lutam pela pedagogia da libertação.

A todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento desta pesquisa e para o encerramento deste ciclo.

Por fim, agradeço a mim mesmo, pela minha resiliência ao longo dessa trajetória.

*Insubordinação criativa é ter consciência sobre quando, como e por que agir contra procedimentos ou diretrizes estabelecidas. Ser subversivamente responsável requer assumir-se como ser inconcluso que toma a curiosidade como alicerce da produção de conhecimento e faz de seu inacabamento um permanente movimento de busca.*

*(D'AMBROSIO; LOPES, 2015)*

## RESUMO

Nesta monografia, objetivamos analisar a implementação de orquestrações instrumentais on-line para o estudo das relações de igualdade em uma aula remota com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Tomamos como fundamentação teórico-metodológica as noções de Orquestração Instrumental e de Orquestração Instrumental On-line, levando em conta os três componentes: configuração didática, modo de execução e performance didática. A pesquisa ocorreu no cenário do Estágio Curricular Supervisionado, por meio de uma parceria entre o estagiário da disciplina de Matemática, o professor-supervisor e a professora-orientadora, em uma escola federal da rede pública. Foi elaborada uma composição de três orquestrações instrumentais on-line sequenciadas imediatas dos tipos: Orientação e explicação pelo professor, Demonstração técnica e Discussão entre atores. Na aula síncrona em que implementamos essas orquestrações, participou um grupo com 13 alunos de uma turma do 6º ano. Dentre os resultados obtidos, identificamos que, inicialmente, alguns alunos atribuíram uma perspectiva operacional à relação de igualdade. Em termos da modalidade de ensino remoto, destacamos as particularidades ocorridas em sala de aula síncrona, a exemplo: interações entre os sujeitos, por meio da videoconferência, e o uso de artefatos digitais (slides, vídeo, Explorador da Igualdade Básico etc.) para o estudo do tema; o que permitiu ampliar as discussões sobre a relação de igualdade em uma perspectiva relacional. Em suma, constatamos, nessa experiência na formação inicial docente, a importância de planejar sistematicamente o arranjo do ambiente de ensino para as aulas remotas.

**Palavras-chave:** Orquestração instrumental on-line; Artefatos digitais; Ensino remoto; Estágio curricular supervisionado; Álgebra escolar.

## ABSTRACT

In this essay, we aim to analyze the implementation of online instrumental orchestrations to study equality relations in a remote class with students from the 6th grade of Elementary School. We took as a theoretic-methodological framework the Instrumental Orchestration and Online Instrumental Orchestration models, considering the three components: didactical configuration, exploitation mode and didactical performance. The research took place in the scenario of the Supervised Internship, through a partnership between the intern of the mathematics discipline, the internship schoolteacher-supervisor and the essay advisor, in a federal state school. A composition of three immediate sequenced online instrumental orchestrations was designed using different orchestration modes: Guidance and explanation by the teacher, technical demonstration and Discussion between actors. In the synchronous class where we implemented these orchestrations, a group of 13 students from a 6th-grade class participated. Among the results obtained, we identified that, initially, some students attributed an operational perspective to equality relations. In terms of the remote teaching modality, we highlight the particularities that occurred in the synchronous classroom, for example, interactions between subjects through videoconference and the use of digital artefacts (slides, video, Equality Explorer: Basics etc.) for the topic study, which allowed broadening the discussions on the relations of equality in a relational perspective. In short, in this experience in initial teacher training, we found the importance of systematically planning the arrangement of the teaching environment for remote classes.

**Key-words:** Online instrumental orchestration; Digital artifacts; Remote teaching; Supervised curricular internship; School álgebra.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Exemplo de uma desigualdade no modo básico .....	23
<b>Figura 2</b> – 1º Exemplo: “5 = ■ + 2” .....	24
<b>Figura 3</b> – 2º Exemplo: “6 = 2 ● + 2” .....	24
<b>Figura 4</b> – Ostensivos da tela do EIB no modo básico .....	26
<b>Figura 5</b> – Ostensivos da tela do EIB no modo básico .....	27
<b>Figura 6</b> – Exemplos de $t_1$ com o uso do EIB no modo básico .....	29
<b>Figura 7</b> – A gênese instrumental .....	34
<b>Figura 8</b> – Modelos de composições de orquestrações instrumentais .....	38
<b>Figura 9</b> – Tipos de orquestrações instrumentais remotas e modos de trabalho .....	39
<b>Figura 10</b> – Composição das OIO’s sequenciadas imediatas .....	48
<b>Figura 11</b> – Exemplo de uma lauda dos slides .....	54
<b>Figura 12</b> – Exemplo da OIO “Orientação e explicação pelo professor” no 2º momento .....	54
<b>Figura 13</b> – A noção de equilíbrio e a noção de equivalência através da balança .....	55
<b>Figura 14</b> – Exemplo do segundo momento da OIO “Demonstração técnica” .....	57
<b>Figura 15</b> – Demonstração técnica do EIB no modo básico .....	58
<b>Figura 16</b> – Demonstração técnica do EIB no modo lab .....	59
<b>Figura 17</b> – Exemplo da OIO “Demonstração técnica” no 3º momento .....	60
<b>Figura 18</b> – Exemplo de uma relação de igualdade apresentada por Juliana .....	62
<b>Figura 19</b> – Exemplo de uma relação de igualdade apresentada por Tiago .....	63
<b>Figura 20</b> – Exemplo da resolução de uma relação de igualdade através do slide .....	64
<b>Figura 21</b> – Exemplo envolvendo a propriedade transitiva da igualdade .....	65
<b>Figura 22</b> – Exemplo de uma relação de igualdade apresentada por Maria .....	66
<b>Figura 23</b> – Exemplo da OIO “Discussão entre atores” no 3º momento .....	67
<b>Figura 24</b> – Representação da resposta de Juliana para a situação-problema .....	68
<b>Figura 25</b> – Situação-problema de uma relação de igualdade representada no EIB .....	68
<b>Figura 26</b> – Outras situações propostas pelo professor-supervisor a partir do problema inicial .....	69

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Síntese das principais ideias do sinal de igualdade no sentido relacional .....	17
<b>Quadro 2</b> – Habilidades da BNCC e do CPE, envolvendo as relações de igualdade, prescritas na unidade temática Álgebra .....	21
<b>Quadro 3</b> – Exemplos de atividades com propriedades de igualdade no modo básico do Explorador da Igualdade Básico .....	23
<b>Quadro 4</b> – Habilidades (EF06MA14) / (EF06MA14PE) na tela básica .....	24
<b>Quadro 5</b> – Elementos das praxeologias matemáticas identificados no uso do Explorador da Igualdade Básico .....	28
<b>Quadro 6</b> – Pesquisas fundamentadas na Orquestração Instrumental na modalidade on-line	41
<b>Quadro 7</b> – Slides elaborados para a aula on-line .....	47
<b>Quadro 8</b> – Configuração didática da OIO “Orientação e explicação” implementada .....	52
<b>Quadro 9</b> – Algumas relações de igualdade propostas na introdução da aula .....	53
<b>Quadro 10</b> – Configuração didática da OIO “Demonstração técnica” implementada .....	56
<b>Quadro 11</b> – Configuração didática da OIO “Discussão entre atores” implementada .....	61

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CPE – Currículo de Pernambuco

EF – Ensino Fundamental

EIB – Explorador da Igualdade Básico

ESO – Estágio Supervisionado Obrigatório

O<sub>n</sub> – Ostensivo

OI – Orquestração Instrumental

OIC – Orquestração Instrumental Coletiva

OII – Orquestração Instrumental Individual

OIO – Orquestração Instrumental On-line

PhET – *Physics Education Technology*

TAD – Teoria Antropológica do Didático

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
1.1.	RELAÇÃO DA IGUALDADE, A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E A ÁLGEBRA ESCOLAR .....	16
1.1.1.	O sinal “=” e a relação de igualdade: uma revisão da literatura .....	17
1.1.2.	Relação de igualdade e as orientações curriculares.....	20
1.2.	O EXPLORADOR DA IGUALDADE BÁSICO (EIB).....	22
1.2.1.	O Explorador da Igualdade Básico e as habilidades da BNCC e do CPE .....	22
1.2.2.	A Teoria Antropológica do Didático e o Explorador da Igualdade Básico.....	25
1.3.	O ENSINO REMOTO EM TEMPOS DE PANDEMIA.....	30
1.4.	OBJETIVOS .....	31
1.4.1.	Objetivo Geral.....	31
1.4.2.	Objetivos Específicos .....	31
<b>2</b>	<b>DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL À ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE .....</b>	<b>32</b>
2.1.	ABORDAGEM INSTRUMENTAL .....	32
2.2.	O MODELO DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL .....	35
2.3.	TIPOS DE ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL .....	36
2.4.	COMPOSIÇÕES DE ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL .....	38
2.5.	ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE .....	39
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>44</b>
3.1.	NATUREZA E TIPO DA PESQUISA.....	44
3.2.	CENÁRIO DA PESQUISA .....	45
3.3.	PARTICIPANTES DA PESQUISA.....	46
3.4.	PROCEDIMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS .....	46
3.4.1.	Seleção dos artefatos para o estudo do tema na aula on-line .....	46
3.4.2.	Planejamento das orquestrações .....	48
3.5.	3.5 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS.....	50
<b>4</b>	<b>ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....</b>	<b>52</b>
4.1.	OIO “ORIENTAÇÃO E EXPLICAÇÃO PELO PROFESSOR” .....	52
4.2.	OIO “DEMONSTRAÇÃO TÉCNICA” .....	56
4.3.	ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE “DISCUSSÃO ENTRE ATORES” .....	60

<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>73</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Este trabalho amplia as investigações desenvolvidas, ao longo de dois anos, no projeto de pesquisa intitulado por “Do cálculo do termo desconhecido à equação do 1º grau: recursos para o estudo de relações e propriedades de igualdade no Ensino Fundamental”, no seio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), financiado pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE). No primeiro ano do referido projeto<sup>1</sup>, realizamos um estudo sobre “Recursos digitais para o estudo de relações e propriedades de igualdade no Ensino Fundamental” e, no segundo ano, sobre “Simulações interativas com recursos digitais para o estudo de relações de igualdade e princípios de equivalência no Ensino Fundamental”.

Nesses estudos, buscamos levantar algumas considerações teóricas sobre a álgebra escolar, especificamente quanto ao uso do sinal “=” e à relação de igualdade. Nesse contexto, frente à proposição da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) e do Currículo de Pernambuco – CPE (PERNAMBUCO, 2019) sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico ao longo do Ensino Fundamental, intentamos identificar, por meio do uso da “Explorador da Igualdade: Básico” – disponível na plataforma *Physics Education Technology – PhET Interactive Simulations*, possibilidades de desenvolver as habilidades prescritas nesses documentos na unidade temática “Álgebra”. Além disso, à luz da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) nos propomos a elencar as organizações matemáticas, em torno do tema Relações de Igualdade e Princípios de Equivalência, possíveis de serem abordadas com o uso do referido artefato digital.

Os resultados dessas pesquisas serviram de base para o presente trabalho sobre orquestrações instrumentais on-line. Adiante, recapitulamos as considerações principais.

### 1.1 RELAÇÃO DA IGUALDADE, A NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E A ÁLGEBRA ESCOLAR

Segundo Kieran (2007), a álgebra escolar não está restrita ao ensino e à aprendizagem de regras e técnicas para a resolução de problemas, pois ela também diz respeito à constituição de uma maneira de pensar e relacionar, levando os alunos a generalizar, modelar e analisar situações matemáticas. Nesse sentido, no que tange à álgebra escolar, é advertida, no *National Council of Teachers of Mathematics* (2007), a necessidade de uma base conceitual sólida, a ser

---

<sup>1</sup> O projeto de pesquisa foi aprovado em dois editais, na área de Ciências Humanas e subárea Ensino-Aprendizagem: no EDITAL FACEPE 01/2020 – PIBIC 2020 e no EDITAL FACEPE 01/2021 – PIBIC 2021.

construída durante todo processo de escolarização, a fim de que os trabalhos com notações simbólicas sejam significativos. Isso indica a importância de um trabalho sistemático com diversas ideias matemáticas: os números e suas propriedades; os diversos sentidos de variável; a noção de equivalência, entre outras. No trabalho vigente, damos ênfase na noção de equivalência no ensino das relações de igualdade.

### 1.1.1 O sinal “=” e a relação de igualdade: uma revisão da literatura

A compreensão do sinal de igualdade nem sempre foi a mesma nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. Destacamos que é comum os alunos apresentarem dificuldades na noção de equivalência envolvendo relações de igualdade, por ainda estarem presos à ideia do símbolo “=” enquanto operacional, trabalhada nos anos iniciais em atividades envolvendo operações aritméticas (CIANI *et al.*, 2017). Como preconizam Ciani *et al.* (2017), de modo geral, a concepção operacional da igualdade emerge para representar uma igualdade de expressões, isto é, o que vem do lado direito do sinal “=” é o resultado de uma operação proposta no lado esquerdo.

Já em uma perspectiva relacional, como exposta no Quadro 1, o símbolo “=” é abordado no sentido de relacionar duas expressões que representam um mesmo objeto matemático. Desse modo, o sinal “=” indica que a expressão ou o número que está no membro esquerdo do sinal de igualdade é equivalente, idêntico ou igual à expressão ou ao número que está ao lado esquerdo (CAVALCANTI; SANTOS, 2010).

**Quadro 1** – Síntese das principais ideias do sinal de igualdade no sentido relacional

Contextos	Categorias de análise (a priori)	Expressões (exemplos)	Principal finalidade do símbolo “=”	Principais características do símbolo “=”
Igualdades aritméticas	Concepção Igualdade Relacional	$6 + 5 = 11$ $5 + 7 = 4 + 8$ $15 = 7 + 8$	Indicar que o que está no lado direito do “=” é igual, idêntico ou equivalente ao que está no lado esquerdo.	Relação de igualdade que inclui: identidade única de significado e equivalência dos diferentes significantes.
Equações	Concepção Equivalência em igualdade condicional	$x + 5 = 14$ $5 + x = 4 + 8$ $5 = x + 8$ (etc.)	Indicar que a expressão ou número que está no lado direito do “=” é equivalente a expressão ou número à esquerda.	Indica uma relação de equivalência em igualdade condicional.

**Fonte:** Cavalcanti (2007); Cavalcanti e Santos (2008).

Muitas pesquisas no campo da Educação Matemática buscaram investigar sobre a igualdade, em diversos contextos, dada a relevância desse objeto matemático nos processos educacionais. Adiante, passamos a discorrer sobre algumas dessas investigações.

Silva e Ribeiro (2014) selecionaram duas coleções de livros didáticos dos últimos anos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e dos primeiros anos dos anos finais do Ensino Fundamental, com o objetivo de analisar as rupturas entre o conceito do sinal de igualdade na transição entre os anos iniciais do EF e os anos finais do EF. Dentre os resultados, os autores indicam os seguintes fatores que dificultam a ressignificação dos conceitos do sinal “=” na transição dos anos iniciais para os anos finais: os significados adotados para o sinal de igualdade e a descontinuidade de linguagem.

Com o objetivo de analisar quais conhecimentos os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental declaram e aparentam ter desenvolvido sobre os diferentes significados do sinal de igualdade, Trivilin e Ribeiro (2015) constataram as limitações dos professores em reconhecer os diferentes significados do sinal “=” e em compreender as relações entre o ensino de diferentes significados do sinal “=” e o currículo. Em suma, os autores ressaltam a relevância do estudo analítico acerca do conhecimento profissional docente, que possibilita o reconhecimento da necessidade de formação de professores.

Em sua dissertação de mestrado, Miranda (2019) propõe-se a investigar, de maneira sistemática, os diferentes significados do sinal de igualdade na Matemática, indo além dos cenários da Aritmética e da Álgebra escolares. Para tanto, o autor define como objetivo da pesquisa: identificar os significados do sinal de igualdade não citados em pesquisas anteriores e expandir a visão sobre esse sinal na Matemática. Como principal resultado, ele classifica os diferentes significados do sinal “=”, segundo os tipos de igualdade, que são: comparativa, instrutiva, representacional, de componente, definidora, nomeante, determinante operacional, condicional, relacional e predicativa (MIRANDA, 2019).

Gomes e Noronha (2022) enfatizam a articulação crítica entre as práticas de ensino e as orientações curriculares, com o objetivo de discutir sobre as prescrições curriculares para o ensino de álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental e analisar o trabalho com o sinal de igualdade em turmas do 4º e 5º anos. Grosso modo, as autoras percebem que a aprendizagem das propriedades dos números e operações matemáticas é potencializada pelas práticas com o sinal “=”. No entanto, elas destacam que, na introdução à álgebra escolar, os documentos curriculares dão prioridade às práticas pedagógicas envolvendo sequências e padrões.

Em seu trabalho de mestrado, Cavalcanti (2008) objetivou compreender as concepções dos estudantes do 3º ano do Ensino Médio acerca dos significados do símbolo “=” no contexto

da Aritmética e da Álgebra. A priori, o autor consegue definir estas cinco concepções: a *operacional*, a *igualdade relacional*, a *equivalência em igualdade condicional*, a *funcional* e a *relacional nome-símbolo* (CAVALCANTI, 2008). A posteriori, ele define duas concepções, são elas: a *símbolo separador* e a *operacional sintático* (Ibidem). Dentre os principais resultados, Cavalcanti (2018) constatou uma incongruência entre as concepções dos estudantes e o significado do símbolo “=” no contexto em que aparecem.

Longe de esgotar as pesquisas já desenvolvidas acerca do sinal e da relação de igualdade na Matemática, intentamos expandir o debate sobre novas abordagens metodológicas de ensino (em particular, na modalidade on-line), tendo em vista a variedade de artefatos didáticos digitais, disponíveis atualmente na internet, que podem ser mobilizados no processo de aprendizagem desses saberes algébricos.

Com efeito, cabe destacar o entendimento de **relação de igualdade** que norteia as discussões do presente estudo:

Em termos matemáticos, a **relação de igualdade** é uma relação de equivalência. Isso quer dizer que é **simétrica** (se  $a = b$  então  $b = a$ , para quaisquer elementos  $a$  e  $b$ ), é **reflexiva** ( $a = a$ , para todo o elemento  $a$ ) e é **transitiva** (se  $a = b$  e  $b = c$ , então  $a = c$  para quaisquer elementos  $a$ ,  $b$  e  $c$ ). Aos poucos os alunos devem conseguir reconhecer e usar estas propriedades (PONTE, BRANCO; MATOS, 2010, p. 19, grifo nosso).

No ensino da álgebra escolar, temos que “Uma **relação de igualdade** representada simbolicamente pode ser uma **situação de igualdade** ou uma **situação de equivalência**, dependerá essencialmente da representação que fazemos”<sup>2</sup> (MINISTÈRE DE L’ÉDUCATION DE L’ONTARIO, 2003, p. 33, grifo nosso, tradução nossa).

Por sua vez, temos o **princípio de equivalência**, que permite operar em ambos os membros da igualdade de modo que não altera a relação:

- **Princípio aditivo:** “A adição é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a = b \Leftrightarrow a + b = b + c$ ” (HEFEZ, 2016, p. 4). Em linguagem corrente, temos que *somando qualquer número inteiro a ambos os membros da igualdade, obtemos uma igualdade equivalente à dada.*
- **Princípio multiplicativo:** “A multiplicação é compatível e cancelativa com respeito à igualdade:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, a = b \Leftrightarrow a \times b = b \times c$ ” (HEFEZ, 2016, p. 7). Em linguagem corrente, temos que *multiplicando ambos os lados da igualdade por qualquer número inteiro diferente de zero, obtemos uma igualdade equivalente à dada.*

---

<sup>2</sup> “Une relation d’égalité représentée symboliquement peut être une situation d’égalité ou une situation d’équivalence; cela dépendra essentiellement de l’explication et de la représentation qu’on en fait” MINISTÈRE DE L’ÉDUCATION DE L’ONTARIO, 2003, p. 33).

Tais considerações conceituais balizaram a investigação de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021) sobre as possibilidades didáticas de ensinar as relações de igualdade com recursos digitais, levando em conta as orientações curriculares atuais, as quais apresentamos, brevemente, alguns pontos no próximo subtópico.

### 1.1.2 Relação de igualdade e as orientações curriculares

No contexto do sistema educacional brasileiro, um movimento histórico para o estabelecimento de uma base curricular, referente à Educação Básica, vem ocorrendo, desde a promulgação da Constituição Federal de 1988, perpassando a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica – DCNs, dentre outros marcos legais, até a consolidação do documento normativo denominado como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018). A BNCC é um documento oficial que prescreve as aprendizagens fundamentais, quanto às etapas e modalidades da Educação Básica, que todos os estudantes devem desenvolver.

No que diz respeito à Matemática na BNCC, temos as competências específicas da área, assim como as habilidades elencadas conforme o ano de escolarização e as cinco unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, e Probabilidade e estatística).

Nesse sentido, focamos neste trabalho na unidade temática **Álgebra**, que tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico. Para desenvolver esse tipo de pensamento, é essencial que os alunos façam: a identificação de regularidades e padrões de sequências (numéricas e não numéricas), o estabelecimento entre leis matemáticas que se referem à relação de interdependência entre grandezas em cenários distintos, assim como a criação, a interpretação e a conversão entre representações gráficas e simbólicas, a fim de resolver problemas a partir da modelização com equações e inequações (BRASIL, 2018). Grosso modo, as concepções matemáticas basilares associadas a essa unidade são: proporcionalidade, interdependência, equivalência e variação.

Nessa perspectiva, segundo a BNCC (BRASIL, 2018), é necessário que alguns aspectos do estudo de álgebra sejam trabalhados desde os anos iniciais, tais como: as noções de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. Entretanto, nessa fase, não se utilizam letras para expressar regularidades, mesmo que sejam simples.

A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se  $2 + 3 = 5$  e  $5 = 4 + 1$ , então  $2 + 3 = 4 + 1$ . Atividades

como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (BRASIL, 2018, p. 270)

Desse modo, sublinhamos a orientação de que a relação de equivalência seja trabalhada, desde os anos iniciais, relacionada à igualdade matemática, por intermédio de exemplos já familiares para os alunos nesta etapa da Educação Básica. Como podemos observar no Quadro 2, as relações de igualdade aparecem em diversas habilidades da BNCC e do CPE, do 3º ano ao 7º ano do Ensino Fundamental, a saber:

**Quadro 2** – Habilidades da BNCC e do CPE, envolvendo as relações de igualdade, prescritas na unidade temática Álgebra

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
3º ano	Relação de igualdade	(EF03MA11) / (EF03MA11PE): Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença, <i>(por exemplo, <math>3 + 4 = 7</math>, então <math>7 = 3 + 4</math>, indicando sentido de equivalência na igualdade; ou ainda a ideia de que é possível que adições e subtrações entre números diferentes deem o mesmo resultado. Assim <math>15 - 10 = 5</math>, <math>25 - 20 = 5</math> são subtrações diferentes com resultados iguais. Então <math>15 - 10 = 25 - 20</math> ou ainda <math>30 + 20 = 15 + 35</math>, pois as duas somas são iguais)</i> <sup>3</sup> .
4º ano	Relações entre adição e subtração e entre multiplicação e divisão	(EF04MA13) / (EF04MA13PE): Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão para aplicá-las na resolução de problemas.
	Propriedades da igualdade	(EF04MA14) / (EF04MA14PE): Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos. (EF04MA15) / (EF04MA15PE): Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
5º ano	Propriedades da igualdade e noção de equivalência	(EF05MA10) / (EF05MA10PE): Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.
		(EF05MA11) / (EF05MA11PE): Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.
6º ano	Propriedades da igualdade	(EF06MA14) / (EF06MA14PE): Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas. <i>(por exemplo, explorando a metáfora da balança)</i> .
7º ano	Equações polinomiais do 1º grau	(EF07MA18) / (EF07MA18PE): Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau redutíveis à forma $ax + b = c$ , fazendo uso das propriedades da igualdade.

<sup>3</sup> Nesse quadro, os exemplos entre parênteses e em itálico encontram-se somente no CPE, complementando a versão inicial das habilidades prescritas na BNCC.

**Fonte:** Brasil (2018); Pernambuco (2019).

Embora as habilidades, apresentadas no Quadro 2, não sugiram o uso das tecnologias digitais como metodologia de ensino, ressaltamos que a quinta competência geral da Educação Básica, nos referidos documentos curriculares, diz respeito à importância da integração das tecnologias digitais nos cenários educacionais:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9; PERNAMBUCO, 2019, p. 17).

Em virtude disso, na área de Matemática, a quinta competência específica para o Ensino Fundamental refere-se a: “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267; PERNAMBUCO, 2019, p. 41).

São com essas compreensões que tecemos algumas considerações sobre o seguinte artefato digital para o estudo do tema.

## 1.2 O EXPLORADOR DA IGUALDADE BÁSICO (EIB)

No subprojeto “Recursos digitais para o estudo de relações e propriedades de igualdade no Ensino Fundamental” do PIBIC, de uma parte, analisamos as possibilidades de uso do recurso “Explorador da Igualdade Básico” (EIB), disponível na plataforma digital PhET – Simulações Interativas, da Universidade do Colorado Boulder, no sentido de desenvolver as habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e do Currículo de Pernambuco (CPE), quanto ao ensino das propriedades de igualdade e dos princípios de equivalência (ALMEIDA; OLIVEIRA; ESPÍNDOLA, 2021). Por outro lado, identificamos as praxeologias matemáticas, em torno do uso EIB, amparados na Teoria Antropológica do Didático.

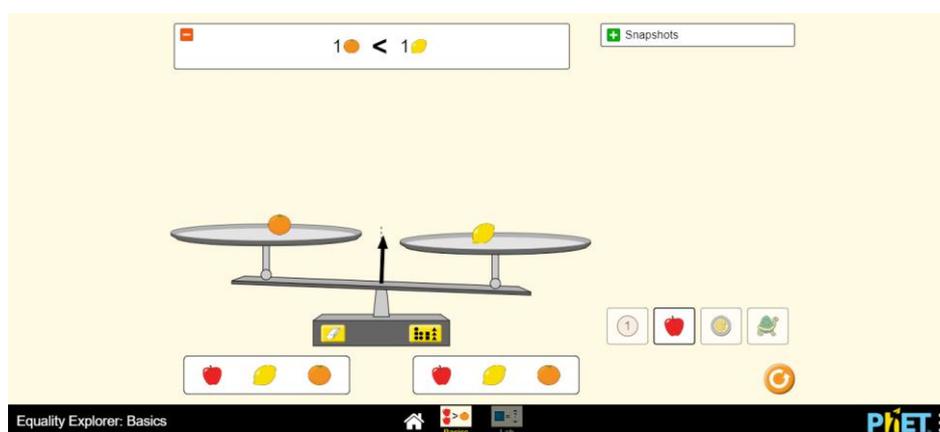
### 1.2.1 O Explorador da Igualdade Básico e as habilidades da BNCC e do CPE

Conforme as informações dispostas na plataforma digital PhET, o *Explorador da Igualdade Básico* (EIB) possibilita a abordagem destes saberes matemáticos: Equações; Desigualdades e Raciocínio Proporcional. Para o uso desse artefato digital, são apresentados os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Usar o modelo da balança para solucionar uma equação com um termo desconhecido (e coeficientes positivos), justificando as estratégias de resolução.
- Mobilizar o raciocínio proporcional a fim de determinar o valor de um único objeto. (UNIVERSIDADE DO COLORADO BOULDER, 2022).

O EIB contém uma balança interativa de dois pratos, dentre outros objetos, composto por duas seções: “básico” e “lab”. No modo básico, o aluno pode compreender as noções de equilíbrio e desequilíbrio, a partir das simulações interativas com a balança, associando-as, respectivamente, aos sinais “=” e “>” ou “<”. Nessa seção, há quatro tipos de objetos a serem inseridos na balança: formas geométricas, frutas, moedas e animais.

**Figura 1** – Exemplo de uma desigualdade no modo básico



**Fonte:** Elaborado pelos autores através da plataforma PhET (2022).

Na Figura 1, podemos observar que, ao colocar as frutas na balança, consegue-se estabelecer uma comparação entre as massas delas. No exemplo acima, a massa de um limão é maior que a de uma laranja, ou, de modo equivalente, o limão pesa mais que uma laranja. E, a sua respectiva visualização na desigualdade matemática: a massa da laranja é menor que a de um limão ou a massa de um limão é maior que a de uma laranja.

Sob a ótica da noção de equilíbrio, podemos ainda explorar com o referido artefato digital as propriedades de igualdade (reflexiva, simétrica e transitiva), como apontam Almeida, Oliveira e Espíndola (2021):

**Quadro 3** – Exemplos de atividades com propriedades de igualdade no modo básico do Explorador da Igualdade Básico

Propriedades de igualdade	Exemplos
Propriedade reflexiva: $a = a$ .	$1 \text{ 🍌 } = 1 \text{ 🍌 }$

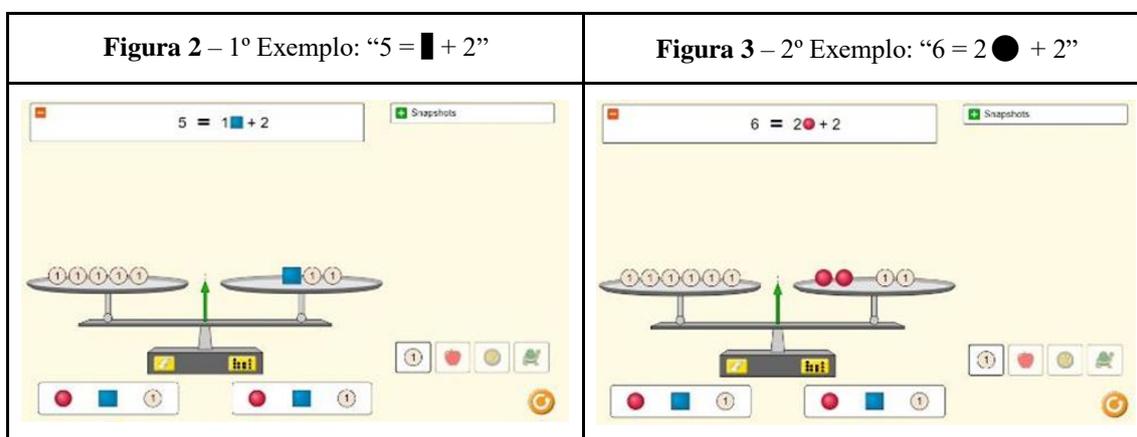
Propriedade simétrica: $a = b \Leftrightarrow b = a$ .	$1 \text{ (verde)} = 1 \text{ (vermelho)} + 1 \text{ (verde)} \Leftrightarrow 1 \text{ (vermelho)} + 1 \text{ (verde)} = 1 \text{ (verde)}$
Propriedade transitiva: $a = b \text{ e } b = c \Rightarrow a = c$ .	$1 \text{ (vermelho)} + 3 \text{ (laranja)} = 2 \text{ (verde)}$ e $2 \text{ (vermelho)} + 1 \text{ (laranja)} = 2 \text{ (verde)}$ $\Rightarrow 2 \text{ (laranja)} = 1 \text{ (vermelho)}$

**Fonte:** Adaptado de Almeida, Oliveira e Espíndola (2021).

No Quadro 3, ilustramos alguns exemplos de relações de igualdade para apresentar como as propriedades de igualdade podem ser abordadas com os alunos de maneira lúdica, por meio da balança interativa, no modo básico. Certamente, os exemplos para a propriedade transitiva revelam bem mais que a propriedade em si, pois também remete à propriedade simétrica. Destacamos ainda que é possível propor situações análogas, no modo laboratório, variando os objetos.

No que concerne às habilidades da BNCC e do CPE (Quadro 2), Almeida, Oliveira e Espíndola (2021) constataram que quatro habilidades prescritas para unidade temática “Álgebra” podem ser desenvolvidas com o uso do referido artefato digital: (EF03MA11)/ (EF03MA11PE); (EF04MA14)/ (EF04MA14PE); (EF05MA10)/ (EF05MA10PE) e (EF06MA14)/ (EF06MA14PE). Para a discussão desses resultados, os autores elencam as descrições dos exemplos das situações possíveis envolvendo as simulações interativas. Como exemplo, discorreremos sobre o uso do EBI para o desenvolvimento da habilidade (EF06MA14)/ (EF06MA14PE):

#### Quadro 4 – Habilidades (EF06MA14) / (EF06MA14PE) na tela básica



**Fonte:** Almeida, Oliveira e Espíndola (2021).

No primeiro exemplo (Figura 2) do Quadro 4, pode-se orientar os alunos a: (i) colocar 5 esferas com numeral “1” no prato esquerdo da balança; (ii) colocar 1 cubo e 2 esferas com o

numeral “1” no prato direito da balança; (iii) determinar valor do cubo em correspondência às esferas com o numeral “1”. Convém ressaltar que as ações “colocar” e “retirar” correspondem, respectivamente, às operações “adicionar” e “subtrair” na igualdade matemática. Nesse sentido, os alunos precisam mobilizar estratégias para resolver a tarefa.

No segundo exemplo (Figura 3) do Quadro 4, é possível orientar os alunos a: (i) colocar 6 esferas com o numeral “1” no prato esquerdo da balança; (ii) colocar 2 esferas vermelhas e 4 esferas com o numeral “1” no outro prato da balança; (iii) determinar o valor da esfera vermelha em correspondência à esfera com o numeral “1”. Destacamos que, nesse exemplo, a ação “retirar” pode corresponder também à operação “dividir”, pois caso o aluno utilize o raciocínio proporcional, ele perceberá que, se tem quatro esferas com o numeral “1” no prato esquerdo da balança e duas esferas vermelhas no outro prato, então a esfera vermelha equivale à metade da quantidade esperas com o numeral “1” no prato esquerdo da balança. E, por consequência, retirar metade das quantidades de cada lado.

Desse modo, os objetos cubo azul e esfera vermelha são, respectivamente: três ( $1 + 1 + 1$ , na balança) e dois ( $1 + 1$ , na balança). E mais, Almeida, Oliveira e Espíndola (2021) sublinham que, a depender da situação proposta nas simulações interativas, os exemplos supramencionados sobre o cálculo de termos desconhecidos podem ser transformados em uma equação polinomial do 1º grau. Ou seja, se o professor tiver essa intencionalidade didática, pode-se desenvolver a habilidade (EF07MA18) / (EF07MA18PE), uma vez que o artefato digital não estabelece, diretamente, a noção dos objetos desconhecidos como incógnitas de uma equação.

### **1.2.2 A Teoria Antropológica do Didático e o Explorador da Igualdade Básico**

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) é uma teoria no campo da Didática da Matemática da escola francesa, desenvolvida por Chevallard (1998) como uma extensão da Teoria da Transposição Didática, ao inserir a didática no campo da antropologia e focar nas praxeologias didáticas referentes ao processo de ensino e aprendizagem de organizações matemáticas (ALMOULOU, 2007; SANTOS; MENEZES, 2015). De maneira geral, a TAD investiga “as condições de possibilidade e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações sujeito-instituição-objeto (em referência ao sistema didático tratado por Brousseau, aluno-professor-saber)” (ALMOULOU, 2007, p. 111).

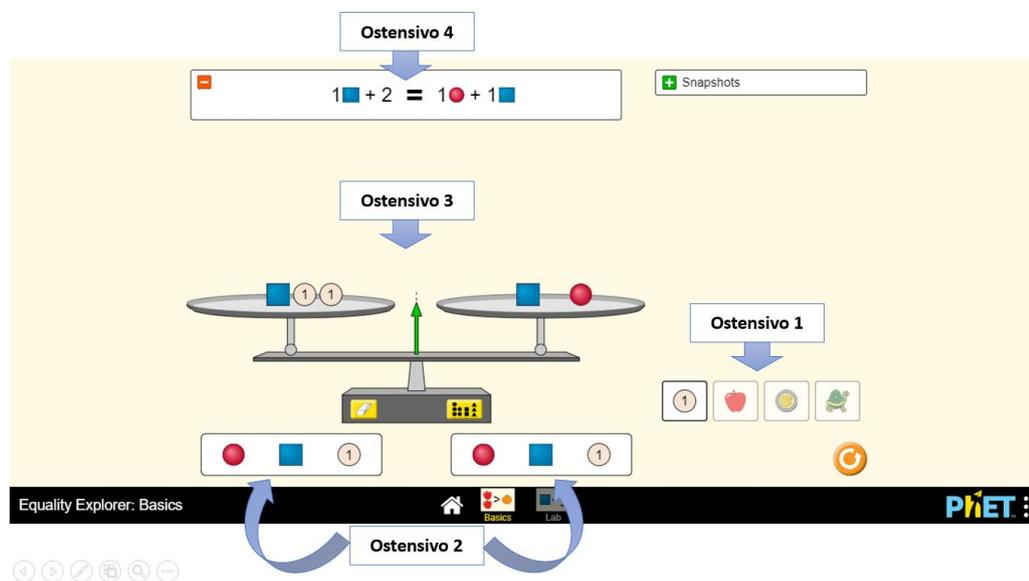
Diante da variedade de conceitos relacionados à TAD, focamos na noção de praxeologia, haja vista que estamos preocupados em aprofundar as análises das tarefas

propostas nas balanças interativas. E, como afirma Chevallard (2018, p. 34), “a noção de praxeologia é o coração da TAD”. Uma organização praxeológica ou praxeologia diz respeito a um *tipo de tarefa* (T), uma *técnica* ( $\tau$ ) para realizar uma tarefa (t) específica do tipo T, uma *tecnologia* ( $\theta$ ) que explica e justifica a técnica utilizada para executar as tarefas do tipo T, e, por fim, uma *teoria* ( $\Theta$ ) que fundamenta a tecnologia (e todos os elementos da organização praxeológica) (CHEVALLARD, 2018). Desse modo, a estrutura praxeológica pontual [T,  $\tau$ ,  $\theta$ ,  $\Theta$ ] (que toma T como um “ponto” de partida) é composta por duas partes: um bloco prático-técnico [T,  $\tau$ ], ou o “saber-fazer” (*práxis*); e um bloco tecnológico-teórico [ $\theta$ ,  $\Theta$ ], ou “saber” (*logos*) (Ibidem).

Além disso, consideramos ainda, com base em Bosch e Chevallard (1999), que na Matemática há objetos ostensivos e não-ostensivos. Os primeiros objetos são perceptíveis, com um potencial material, a exemplo: os sons, os grafismos e os gestos, tornando-os possíveis de serem manipulados. Enquanto os segundos objetos são desprovidos dessa materialidade, isto é, caracterizam-se como as ideias e os conceitos. Diante do exposto, discorreremos, a seguir, como esses pressupostos da TAD balizaram os as análises da pesquisa de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021).

Aos analisarmos os objetos materiais (passíveis de manipulação virtual) do EIB, identificamos quatro tipos de ostensivos, que contribuem diretamente para o estudo das relações de igualdade, são eles:  $O_1$  – Tipos dos objetos;  $O_2$  – Objetos a serem inseridos na balança;  $O_3$  – Balança de dois pratos; e  $O_4$  – Sinal de igualdade entre duas sentenças.

**Figura 4** – Ostensivos da tela do EIB no modo básico

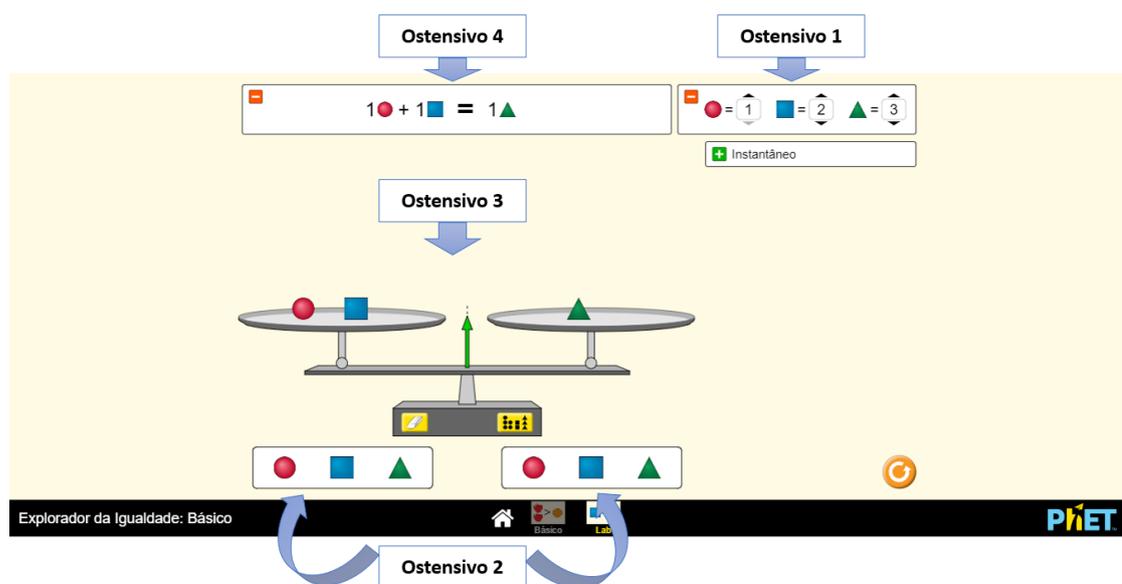


**Fonte:** Adaptada de Oliveira, Almeida e Espíndola (2021).

Convém ressaltar que o  $O_3$  – *Balança de dois pratos* pode contribuir para a compreensão da igualdade matemática enquanto noção de equivalência, isto é, o sinal de igualdade sendo visto em uma perspectiva relacional. A analogia estabelecida entre  $O_3$  e o não-ostensivo “Relação de Igualdade” se dá por meio da relação que se faz entre cada lado da balança com cada membro da igualdade. Logo, como supramencionado no início deste capítulo, quando uma balança de dois pratos está equilibrada temos uma equivalência sendo garantida. Tal compreensão é constatada por meio do  $O_4$  – *Sinal de igualdade entre duas sentenças*, que explicita com simbologia “=” quando há um equilíbrio em  $O_3$ . Para que possamos visualizar esses ostensivos no estudo do tema em tela, precisamos, antes de tudo, inserir ou retirar objetos da balança, ou seja, mobilizar o  $O_1$  – *Objetos a serem inseridos na balança*, o que remete às operações feitas em uma igualdade. Além disso, os objetos inseridos e retirados sofrem influência do  $O_2$  – *Tipos de objetos*, que permite apenas escolher quais tipos de objetos (sólidos geométricos, frutas, moedas e animais) mobilizados nas simulações.

Diferentemente do modo básico, na seção lab, o  $O_1$  – *Tipos dos objetos* possibilita que os alunos, além de escolher o tipo de objeto (esfera, cubo e pirâmide) a ser inserido na balança, atribuam os valores desses objetos, variando de 0 a 20.

**Figura 5** – Ostensivos da tela do EIB no modo básico



**Fonte:** Adaptada de Oliveira, Almeida e Espíndola (2022).

Outro ponto importante de ser destacado é a existência de outros ostensivos secundários, que facilitam a manipulação do Explorador da Igualdade Básico, por exemplo: “borracha” (  ), que retira todos os objetos da balança caso os alunos queiram propor outra situação, e

“empilhador de objetos” () , que empilha cada tipo de objeto um em cima do outro, dando outra disposição aos objetos inseridos na balança. Não enfocaremos na manipulação dessas e de outras ferramentas pois não faz parte do objetivo deste estudo.

Os quatro principais ostensivos do EIB, descritos acima, estão permeados na análise das praxeologias matemáticas (OLIVEIRA; ALMEIDA; ESPÍNDOLA, 2021), uma vez que eles são fundamentais na mobilização das técnicas para a resolução das tarefas envolvendo o referido artefato digital.

A seguir, apresentamos seis subtipos de tarefas relacionadas à tarefa *T – Elaborar e resolver problemas com o uso do Explorador da Igualdade Básico*. Salientamos que os subtipos de tarefas não são apresentados na plataforma imediatamente, eles foram elaborados pelos pesquisadores a partir das constantes análises das funcionalidades do EIB.

**Quadro 5** – Elementos das praxeologias matemáticas identificados no uso do Explorador da Igualdade Básico

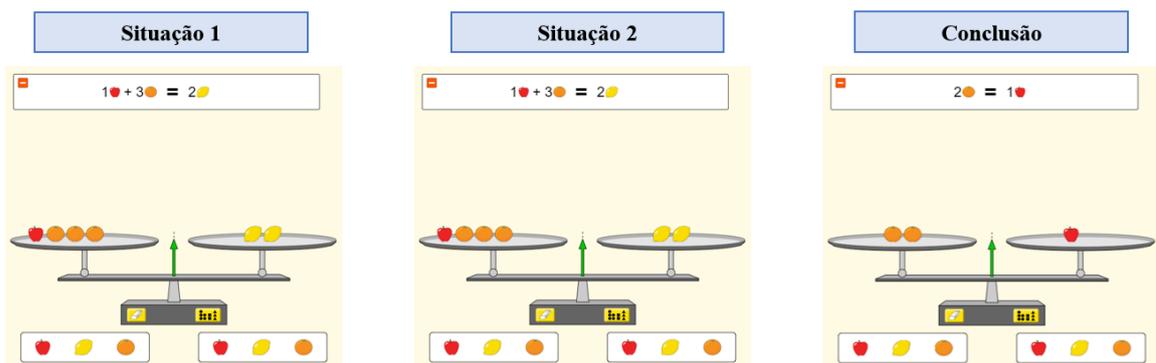
Tipos de Tarefas	Descrição das técnicas	Tecnologias
<b>t<sub>1</sub></b> : Mostrar, por meio da balança interativa, uma relação de igualdade entre quantidades equivalentes de objetos.	$\tau_1$ : Escolher o tipo de objetos ( $O_1$ ) e colocar os objetos ( $O_2$ ) em ambos os lados da balança ( $O_3$ ) do EIB até obter o seu equilíbrio, que pode ser observado por meio da igualdade ( $O_4$ ).	<b><math>\theta_1</math></b> : Noção de igualdade em uma situação-problema, envolvendo equilíbrio. <b><math>\theta_2</math></b> : Interpretação do sinal de igualdade como equivalência.
<b>t<sub>2</sub></b> : Determinar, por meio da balança interativa, diferentes sentenças de adições de objetos que resultem na mesma soma.	$\tau_2$ : Aplicar $\tau_1$ . Relacionar os objetos ( $O_2$ ) apresentados em cada lado da balança ( $O_3$ ) aos seus valores numéricos ( $O_1$ ). Observar as igualdades matemáticas, a fim de constatar as relações ( $O_4$ ), que podem ser salvas com a ferramenta de captura de tela.	<b><math>\theta_1, \theta_2</math></b> <b><math>\theta_3</math></b> : Identificação do sentido de igualdade em uma operação numérica de adição.
<b>t<sub>3</sub></b> : Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se adiciona um mesmo objeto a cada membro.	$\tau_3$ : Aplicar $\tau_1$ . Adicionar um mesmo tipo de objeto ( $O_1$ e $O_2$ ) em ambos os lados da balança ( $O_3$ ) para verificar seu equilíbrio e verificar a igualdade ( $O_4$ ) entre as sentenças de adição.	<b><math>\theta_1, \theta_2, \theta_3</math></b> <b><math>\theta_4</math></b> : Princípio aditivo de equivalência.
<b>t<sub>4</sub></b> : Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se subtrai um mesmo objeto a cada membro.	$\tau_4$ : Aplicar $\tau_1$ . Subtrair um mesmo tipo de objeto ( $O_1$ e $O_2$ ) em ambos os lados da balança ( $O_3$ ) para verificar seu equilíbrio e verificar a igualdade ( $O_4$ ) entre as sentenças de adição.	<b><math>\theta_1, \theta_2, \theta_3</math></b> <b><math>\theta_4</math></b> : Princípio aditivo de equivalência.
<b>t<sub>5</sub></b> : Determinar o termo desconhecido, em uma relação de igualdade envolvendo adição e subtração, por meio da balança interativa.	$\tau_5$ : Colocar apenas em um lado da balança os seguintes: objetos esfera vermelha e/ou cubo azul ( $O_1$ e $O_2$ ). Adicionar esferas com o numeral “1” em um ou dois lados da balança ( $O_3$ ). Subtrair um mesmo número em ambos os lados da balança até chegar no	<b><math>\theta_1, \theta_2, \theta_3</math></b> <b><math>\theta_4</math></b> : Princípio aditivo de equivalência.

	valor do objeto (esfera vermelha ou cubo azul).	
<b>t<sub>6</sub>:</b> Determinar o termo desconhecido em uma relação de igualdade envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, por meio da balança interativa.	<b>τ<sub>6</sub>:</b> Colocar apenas em um lado da balança os seguintes objetos: esfera vermelha e/ou cubo azul (O <sub>1</sub> e O <sub>2</sub> ). Adicionar esferas com o numeral “1” em um ou dois lados da balança (O <sub>3</sub> ). Subtrair a mesma quantidade em ambos os lados da balança, verificando o seu equilíbrio. Retirar a metade da massa em ambos os pratos, que na igualdade representa a divisão de ambos os membros, para chegar ao valor do objeto esfera vermelha ou cubo azul.	<b>θ<sub>1</sub>, θ<sub>2</sub>, θ<sub>3</sub>, θ<sub>4</sub></b> <b>θ<sub>5</sub>:</b> Princípio multiplicativo de equivalência.

**Fonte:** Adaptado de Almeida, Oliveira e Espíndola (2021).

Exemplificamos ainda, adiante, sobre o subtipo de tarefa **t<sub>1</sub>** disposto no Quadro 5, a fim de compreendermos o uso do Explorador da Igualdade Básico no contexto do ensino de Matemática, visando a aprendizagem dos alunos quanto ao tema Relação de Igualdade. Pontuamos que **t<sub>1</sub>** – *Mostrar, por meio da balança interativa, uma relação de igualdade entre quantidades equivalentes de objetos* – é fundamental, pois, para qualquer experimentação com o EIB acerca da noção de equivalência (**θ<sub>1</sub>, θ<sub>2</sub>**), os alunos precisam colocar objetos equivalentes em ambos os lados da balança de dois pratos (**τ<sub>1</sub>**), de modo que ela fique em equilíbrio.

**Figura 6** – Exemplos de **t<sub>1</sub>** com o uso do EIB no modo básico



**Fonte:** Elaborado pelos autores (2022).

Como ilustrado na Figura 6, temos três relações de igualdade, que são equivalentes entre si e, em cada uma delas, temos uma equivalência entre os objetos em ambos os membros da igualdade. Nesse exemplo, visto anteriormente como ilustração da propriedade transitiva (Quadro 3), partindo das premissas (situações 1 e 2), chegamos na tese (conclusão). A partir de

exemplos como esse, espera-se que os alunos percebam através de diversas situações propostas, a propriedade matemática subjacente. Isto é, consigam generalizar algebricamente.

### 1.3 O ENSINO REMOTO EM TEMPOS DE PANDEMIA

À medida que o mundo avança, novas demandas sociais, culturais, econômicas, educacionais, científicas, entre outras, surgem. As transformações na sociedade impactam, seja direta ou indiretamente, nos processos de ensino e aprendizagem das instituições de ensino, uma vez que uma das preocupações dessas instituições deve ser com a formação cidadã de sujeitos críticos – que refletem, questionam, debatem, problematizam, criam, etc. – envolvidos nelas (FREIRE, 2019). Desse modo, partindo do pressuposto de que o cenário pandêmico da COVID-19<sup>4</sup> provocou modificações nas instituições sociais, haja vista que foi indispensável tomar medidas imediatas de prevenção e de contenção de indivíduos infectados pelo vírus, consideramos que no âmbito educacional, começou-se a admitir, emergencialmente, a modalidade de ensino remota.

Como afirmam Moreira, Henriques e Barros (2020), o ensino remoto emergencial ocorreu globalmente, devido à suspensão das atividades letivas na modalidade presencial, que exigiu dos professores e alunos migrarem para o mundo on-line, conectados por diferentes espaços geográficos. Assim, no início da pandemia da COVID-19, foram transferidas e transpostas as metodologias de ensino típicas dos formatos presenciais (MOREIRA; HENRIQUES; BARROS, 2020). Entretanto, como preconizam os autores, as tecnologias digitais estavam sendo empregadas nos processos educacionais de modo meramente expositivo, reduzindo as práticas em sala de aula apenas a um caráter transmissivo.

Diante disso, Morreira, Herinques e Barros (2020) propõe a urgência da transição do ensino remoto emergencial, importante no momento incipiente, para uma educação digital em rede, com a participação ativa dos alunos em ambientes colaborativos. Com efeito, para que essa transição ocorra, faz-se fundamental o desenvolvimento de investigações que busquem compreender como os artefatos intervêm na atividade humana, em particular, nas práticas de professores e alunos durante as aulas de Matemática no contexto de ensino on-line, seguindo uma perspectiva de trabalho colaborativo.

Para tanto, é indispensável atrelar a problemática apresentada a partir do projeto desenvolvido no PIBIC com a necessidade de desenvolver, aplicar e analisar novas metodologias de ensino de Matemática, para o estudo da relação de igualdade e a noção de

---

<sup>4</sup> Doença infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2.

equivalência com artefatos digitais que incitem à experimentação, por parte dos alunos, levando em consideração as características específicas da modalidade de ensino remoto.

Mediante o exposto, buscamos responder a seguinte questão de pesquisa: quais são os efeitos da implementação de orquestrações instrumentais on-line para o estudo das relações de igualdade em uma aula remota com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental? Intentando responder esse questionamento, trilhamos os seguintes objetivos.

## 1.4 OBJETIVOS

### 1.4.1 Objetivo Geral

- Analisar o processo de concepção e implementação de orquestrações instrumentais on-line para o estudo da relação de igualdade e da noção de equivalência em uma aula remota com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

- Conceber configurações didáticas e modos de execuções para uma aula on-line sobre relação de igualdade e a noção de equivalência;
- Analisar as performances didáticas que emergiram durante uma aula on-line sobre relação de igualdade e a noção de equivalência.

Para alcançarmos tais objetivos, fundamentamo-nos teórica e metodologicamente nas concepções de Orquestração Instrumental e Orquestração Instrumental On-line, as quais passamos a discorrer a seguir.

## 2 DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL À ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE

Para um melhor entendimento sobre o modelo teórico da Orquestração Instrumental On-line, é fundamental percorrer pelos seus fundamentos epistemológicos, ou seja, pela definição inaugural da Orquestração Instrumental – OI, pelos tipos de OI, que antecedem o referido modelo, e, sobretudo, pela Abordagem Instrumental.

### 2.1 ABORDAGEM INSTRUMENTAL

Em sua obra “Os homens e as tecnologias: uma abordagem cognitiva dos instrumentos contemporâneos”<sup>5</sup>, Rabardel (1995) defende uma abordagem antropológica quanto ao uso de artefatos na atividade humana. Nesse sentido, o autor reconhece a relevância dos sujeitos no manuseio dos artefatos, que são produzidos a partir de tecnologias. Pois, desde a concepção, esses objetos são pensados e planejados por um ambiente humano.

Alicerçando-nos nessa perspectiva, acreditamos que a seleção, o uso e a adaptação de artefatos, recursos e, estritamente, simulações interativas digitais requer, além de uma análise quanto às suas funcionalidades, potencialidades e limitações, um olhar direcionado ao sujeito que os manuseia, assim como em seus processos cognitivos (IGNÁCIO, 2018).

Ao propor a Abordagem Instrumental (AI), Rabardel (1995) preconiza conceitos importantes para seu entendimento: artefato, instrumento, os processos de gênese instrumental – instrumentalização e instrumentação – e os esquemas de utilização.

A noção de artefato inclui tanto os objetos materiais quanto os objetos simbólicos.

O artefato é para o sujeito um objeto a conhecer, mas para conhecer para poder gerenciar o seu funcionamento para responder a alguns os critérios prescritos ou simplesmente esperados. Os artefatos não são apenas meios individuais, eles são passíveis de compartilhamento e divisão do trabalho, eles têm um significado incorporado em uma prática social. Portanto, artefatos estão em constante evolução e refletem um estado histórico da prática de usuários ao mesmo tempo que modelam tal prática (RABARDEL, 1995, p. 54, tradução de LUCENA, 2018, p. 39).

Já o instrumento “é uma produção humana, cognitiva e interna do usuário, que pode ser desenvolvida de forma individual ou coletiva, resultante de um processo denominado gênese instrumental” (LUCENA, 2018, p. 39).

Grosso modo, diferentemente de outras conceituações, as quais o artefato é considerado de forma explícita ou implícita como o instrumento, Rabardel (1995, p. 5) propõe que o

---

<sup>5</sup> Título em francês: “Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains”.

instrumento é uma entidade mista que abarca dois componentes: (i) “Um artefato material ou simbólico produzido pelo usuário ou por terceiros” e (ii) “Um ou mais esquemas de utilização associados, resultantes de uma construção própria ou da apropriação de esquemas sociais pré-existentes”. Assim, com base em Gueudet e Trouche (2016, p. 6), podemos dar a seguinte definição sintética: “*instrumento = artefato + esquema*”.

Segundo Rabardel (1995), para compreendermos o que é um esquema<sup>6</sup> de utilização (a entidade humana do instrumento), devemos distinguir os três tipos de esquemas: esquemas de uso; esquemas de ação instrumentada; esquemas coletivos de atividades instrumentadas.

(I) Esquemas de uso (Schèmes d’usage – Sh.U.) são esquemas elementares relativos às tarefas secundárias que consistem em ações e atividades diretamente ligadas ao artefato e à gestão das características e propriedades específicas desse; (II) Esquemas de ação instrumentada (Schèmes d’action instrumentée – Sh.A.I.) incorporam os esquemas elementares (Sh.U.), mas são relativos às tarefas primárias nas quais ocorrem transformações operacionais sobre o objeto da atividade, para a qual o artefato é um meio de realização. (III) Esquemas de atividade coletiva instrumentada (SH.A.C.I.) concentram-se por um lado em especificar os tipos de ação ou atividade, os tipos de resultados aceitáveis etc. quando o coletivo compartilha o mesmo instrumento ou trabalha com uma mesma classe de instrumentos; por outro lado, concentram-se sobre a coordenação de ações individuais e integração de seus resultados como uma contribuição para a realização de objetivos comuns (RABARDEL, 1995, p. 91-92, tradução de LUCENA, 2018, p. 42).

Partindo dessa conceitualização psicológica de artefato e de instrumento, proposta na Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995), para o campo da ergonomia e da didática, discutimos sobre a gênese instrumental.

Como afirmam Drijvers et al. (2010, p. 214, tradução nossa), “o conhecimento técnico sobre o artefato e o domínio do conhecimento específico (neste caso, conhecimento matemático) estão entrelaçados”. Assim sendo, é na gênese instrumental que co-emergem os esquemas e técnicas de utilização do artefato.

A gênese instrumental diz respeito aos processos de instrumentação e instrumentalização pelos quais o sujeito passa quando integra o artefato à sua prática, transformando-o em instrumento (RABARDEL, 1995). “A transformação do artefato em instrumento não é própria da estrutura da ferramenta, mas dos esquemas que o sujeito desenvolve para integrá-lo” (LUCENA, 2018, p. 40).

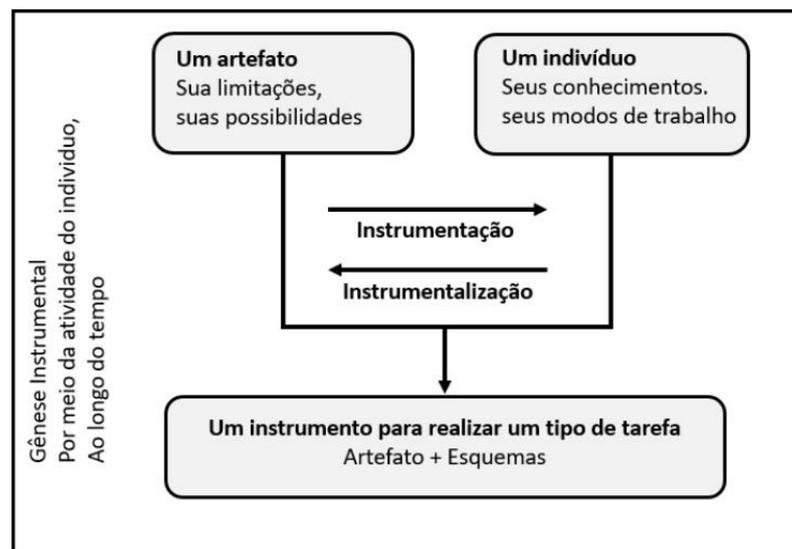
- Os **processos de instrumentalização** dizem respeito ao surgimento e evolução dos componentes artefactuais do instrumento: seleção, agrupamento, produção e instituição de funções, desvios e catacreses, atribuição de propriedade, transformação do artefato (estrutura, funcionamento, etc.) que prolongam as criações e realizações de artefatos cujos limites são, portanto, difíceis de determinar;

<sup>6</sup> A noção de esquema fundamenta-se em Vergnaud (1990), que diz respeito a uma organização invariante da atividade, que abrange as regras de ação, e é estruturada por invariantes operatórios criados durante esta atividade, em diferentes contextos reunidos pela mesma classe de situações.

- Os **processos de instrumentação** estão relacionados ao surgimento e evolução de esquemas de utilização e de ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por meio da acomodação, coordenação, combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos para esquemas já constituídos, etc. (RABARDEL, 1995, p. 111).

Em síntese, como apontam Drijvers e Trouche (2008), quando o artefato é adaptado pelo sujeito, tem-se a instrumentalização e, quando o primeiro intervém no desenvolvimento do pensamento do segundo, tem-se a instrumentação. A seguir, a Figura 7 ilustra a gênese instrumental como o resultado da atividade de uma pessoa com o artefato, levando-se em consideração o aspecto temporal e tomando por base seus conhecimentos e modos de trabalho.

**Figura 7** – A gênese instrumental



**Fonte:** Trouche (2005, p. 101, tradução de Lucena, 2018, p. 41).

Pensando no sistema didático, Lucena (2018, p. 40) afirma que

No âmbito da sala de aula, se o professor deseja guiar seus alunos em suas gêneses instrumentais, é indispensável a disponibilização de artefatos (calculadoras, softwares, transferidor, régua etc.) para que esses estudantes possam inseri-los como suporte à prática de resolver situações matemáticas (tarefas, problemas, exercícios). Ao tentar resolver a situação com suporte do artefato, os esquemas mentais dos alunos os orientarão à integração do artefato às ações de uso do dele, as quais permitirão a resolução da situação matemática ou de outra natureza, proposta. Quando isso ocorre, tem-se o instrumento.

Portanto, como aponta a autora, ressaltamos que, quando o professor decide favorecer a gênese instrumental de seus alunos, espera-se que os processos de instrumentalização e de instrumentação ocorram. Para tanto, é indispensável que o professor domine o conhecimento específico – no nosso contexto, relações de igualdade – presente nas tarefas, bem como o conhecimento das tecnologias em cena, a serem disponibilizadas em classe. Tais conhecimentos são fundamentais para o trabalho docente, enquanto mediador da aprendizagem estudantil.

## 2.2 O MODELO DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

O modelo teórico da Orquestração Instrumental – OI preconiza a utilização de artefatos no campo educacional, em ambientes ricos em tecnologias, em particular digitais, com a finalidade de contribuir com os processos de ensino e aprendizagem da Matemática (LUCENA; GITIRANA; TROUCHE, 2019). Na definição proposta por Trouche (2004, p. 126), temos que

Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrios dos seus sistemas de instrumentos.

Ao adotar a metáfora da orquestração, Trouche (2004b) equipara o professor a um maestro, os alunos aos músicos, a sala de aula a uma orquestra, as tecnologias aos instrumentos musicais e os ambientes de ensino aos repertórios.

Os conceitos da abordagem instrumental têm conduzido naturalmente a uma reflexão sobre o papel do professor, não como um participante da orquestra, mas como um maestro de uma orquestra, responsável pelo conjunto de instrumentos da classe. A classe é, então, vista como uma orquestra tocando uma partitura matemática. (BELLEMAIN; TROUCHE, 2019, p. 110).

Assim, partindo dos princípios da Abordagem Instrumental, estritamente do seu coração – a gênese instrumental –, a noção da OI foi desenvolvida visando a medição, por parte do professor, nos processos de instrumentação e instrumentalização pelos quais os alunos passam ao utilizarem artefatos para resolver uma dada situação matemática. Ressaltamos que a OI é constituída por três componentes: a configuração didática, o modo de execução (TROUCHE, 2004a; 2004b) e o performance didática (DRIJVERS *et al.*, 2010). Com base em Lucena, Gitirana e Trouche (2016, p. 3), temos que

A configuração didática diz respeito à organização da sala de aula e às escolhas didáticas feitas pelo professor no que concerne à tarefa matemática, aos recursos a serem disponibilizados, às funções dos indivíduos envolvidos, entre outros aspectos. Já o modo de execução consiste na operacionalização da configuração didática desenvolvida previamente pelo professor com foco na gênese instrumental dos estudantes. No desempenho didático, o professor pode perceber, a partir do modo de execução, situações que não foram previstas na configuração didática. Diante destas, o professor faz emergir as decisões *ad hoc*. Além disto, pode analisar se o desempenho da orquestração instrumental criada foi favorável ou não aos seus objetivos didáticos.

Convém destacar que a configuração didática e o modo de execução são indispensáveis ao planejamento docente, uma vez que o professor se organiza, previamente, a partir dos objetivos de aprendizagem (exemplo: resolver problemas com “relações de igualdade” com recursos digitais) e de formação, a fim de propor um cenário didático propício ao desenvolvimento das gêneses instrumentais dos alunos. Entretanto, ao explorar o cenário didático, muitos aspectos da OI prevista aparecem e outros novos surgem, pois o que agora está

em jogo não são apenas as expectativas dos professores, mas a realidade da sala de aula dotada de subjetividades dos alunos. Assim sendo, quando o professor analisa o desempenho didático da OI executada, ele pode avaliar tantos pontos do seu trabalho docente – planejamento e ensino – quanto à aprendizagem estudantil.

Além disso, é no desempenho didático que acontecem dois fenômenos didáticos a serem analisados: decisões *ad hoc* (DRIJVERS *et al.* 2010) e reações *ad hoc* (LUCENA; GITIRANA; TROUCHE, 2019). As situações inesperadas pelo professor aparecem no desempenho didático exigindo-lhes decisões não planejadas, o que Drijvers *et al.* (2010) denominam por decisões *ad hoc*, ou seja, aquelas de natureza didático-pedagógicas que possuem objetivos e procuram assegurar um bom desempenho da orquestra. Enquanto as reações *ad hoc* dos alunos não possuem uma perspectiva didático-pedagógica, uma vez que a finalidade é resolver as situações propostas pelo professor ou ter uma boa performance na orquestra em desenvolvimento (LUCENA; GITIRANA; TROUCHE, 2019).

Várias pesquisas acadêmicas em Língua Portuguesa tomam como suporte, seja metodológico ou teórico, o modelo da Orquestração Instrumental, algumas delas são: Lucena, Gitirana e Trouche (2016); Teixeira, Matos e Domingos (2016); Lucena, Gitirana e Trouche (2018); Almeida *et al.* (2020); Lucena (2015); Lucena (2018), dentre outras. Tais estudos permitem-nos compreender melhor, em contextos variados, os conceitos aqui abordados.

### 2.3 TIPOS DE ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

Para além desses conceitos fundamentais e motivados pelo interesse de investigar quais tipos de orquestrações são desenvolvidos pelos professores ao usarem tecnologias em sala de aula, bem como as relações entre esses tipos de orquestrações e as percepções dos professores sobre a educação matemática e a função das tecnologias nela, Drijvers *et al.* (2010) levantam os seguintes questionamentos: (i) “Que tipos de orquestração instrumental emergem no ensino em sala de aula rica em tecnologia?” (DRIJVERS *et al.*, 2010, p. 216, tradução nossa) e (ii) “Até que ponto os repertórios de orquestrações dos professores estão relacionados às suas visões expressas sobre a educação matemática e o papel da tecnologia nela?” (ibidem). Buscando responder essas perguntas, os autores destacam diferentes tipos de orquestrações identificados neste estudo.

Em sua tese de doutorado, Rousson (2017), inspirada pelos tipos de orquestrações identificadas por Drijvers *et al.* (2010), propõe nomes gerais aos tipos de orquestrações, a fim de que possam ser adaptadas para artefatos digitais ou não.

Com base em Drijvers *et al.* (2010) e Rousson (2017), é possível distinguir duas grandes categorias de OI, em virtude das tarefas propostas aos alunos: a OI coletiva (OIC) e a OI individual (OII). Na OIC, os alunos têm um tempo para discutir a tarefa uns com os outros e/ou com o professor. Na OII, os alunos trabalham individualmente, em dupla ou em grupos para resolver a tarefa.

Segundo Rousson (2017), dentre as possíveis OIC, há os seguintes tipos: *demonstração técnica; explicação pelo professor; orientação e explicação do professor; discussão entre os atores*; e *Sherpa*. Sobre a OII, tem-se o tipo *trabalho e acompanhamento*.

A OIC *demonstração técnica* diz respeito à apresentação das técnicas dos artefatos por parte do professor. Por exemplo, quando o professor mostra como se utiliza uma calculadora, um compasso, uma régua, uma simulação interativa, o GeoGebra, entre outros. No caso dos artefatos digitais, é importante enfatizar que a demonstração técnica se refere à apresentação de suas ferramentas e funcionalidades.

Na OIC *explicação pelo professor*, a explicação pelo professor vai além dos aspectos técnicos dos artefatos, e abrange também o conteúdo matemático. Na OIC *orientação e explicação pelo professor*, o professor explica aos alunos um conteúdo matemático, mas também propõe questionamentos, fazendo, quando necessário, uma relação entre o que acontece no cenário tecnológico e como isso é representado com artefatos analógicos, como o livro, o papel etc. A temática da discussão é regulada pelo professor.

Já na OIC *discussão entre atores* a discussão é mais livre e menos limitada que no tipo de orquestração precedente. Nessa OIC, ocorrem discussões (entre o professor e os alunos ou entre os alunos) a fim de melhorar a compreensão da tarefa e potencializar a gênese instrumental coletiva.

A última OIC, denominada *Sherpa*<sup>7</sup>, está relacionada ao momento em que um aluno ou vários alunos fazem uso da tecnologia para apresentar aos demais seu trabalho ou, por exemplo, uma estratégia de resolução. Nessa OIC, o aluno realiza ações requeridas por outro aluno ou pelo professor.

Por fim, na OII *trabalho e acompanhamento*, os alunos trabalham individualmente ou em pequenos grupos com o uso da tecnologia. Enquanto isso, o professor circula entre eles para auxiliá-los. Alguns desses tipos de orquestrações serão retomados adiante na apresentação dos resultados deste trabalho.

---

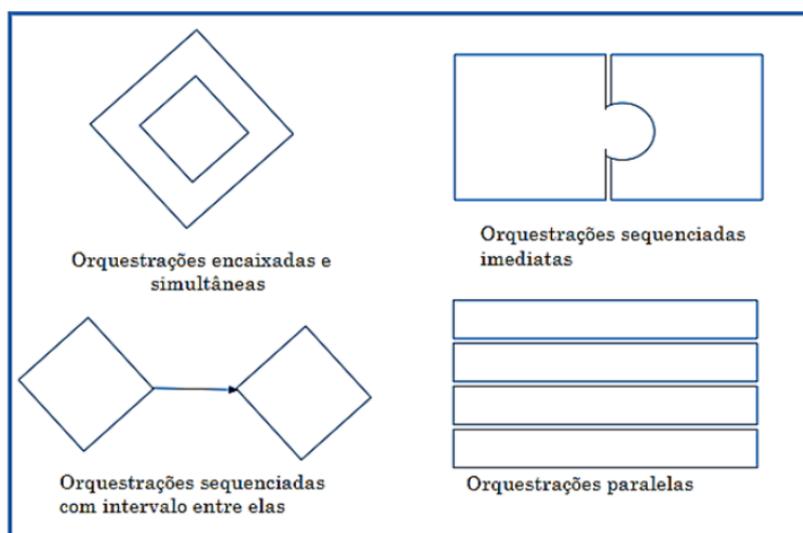
<sup>7</sup> Sherpa em alusão ao trabalho de Trouche (2004a).

A classificação no que tange aos tipos de orquestração instrumental nos permite compreender melhor as decisões didáticas do professor quanto à estruturação da sala de aula, da natureza das situações propostas aos alunos, de qual papel cada participante (professor e aluno) tem na OI em cena, de como os artefatos são incorporados para a realização da situação matemática etc.

## 2.4 COMPOSIÇÕES DE ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

Refletindo sobre a composição de orquestrações, Gitirana e Lucena (2021) adaptaram os modelos de composição, inaugurados por Lucena (2018), e apresentam estas composições de orquestrações instrumentais: (i) encaixadas e simultâneas, (ii) sequenciadas imediatas, (iii) sequenciadas com intervalos entre elas, e (iv) paralelas.

**Figura 8** – Modelos de composições de orquestrações instrumentais



**Fonte:** Gitirana e Lucena (2021, adaptado de Lucena, 2018).

Como pode-se observar na Figura 8, a composição de orquestrações encaixadas e simultâneas se referem às diferentes OI's que são executadas de maneira simultânea. Nesse tipo, há uma dependência entre essas OI's, pois para que uma ocorra a outra também deve ocorrer. Na composição de orquestrações sequenciadas, temos diferentes OI's que são executadas com tempo sequencial (uma depois da outra) ou com um espaçamento de tempo (horas, dias, semanas etc.) entre elas. Por último, temos a composição de orquestrações paralelas, que são diferentes e executadas de maneira independente e simultânea.

As composições de orquestração instrumental referem-se à estruturação de orquestrações que ocorrem em conjunto, ou seja, elas são interligadas para que a

intencionalidade didática do professor, sobre o aprendizado de determinado saber matemático, seja alcançada. Isso não implica dizer que elas são dependentes uma da outra, haja vista que cada uma delas possui os três momentos de uma orquestração (configuração didática, modo de execução e performance didática), mas sim que compostas elas possibilitam mais significados aos processos de ensino e aprendizagem.

Nesta subseção, discutimos sobre alguns tipos de orquestrações. Contudo, não se esgota a possibilidade de se elaborar outros tipos, a depender das demandas educacionais vigentes em cada contexto sociocultural. Particularmente, existem tantos tipos de orquestrações quantos um professor deseja planejar para sua aula. No nosso caso, um pesquisador frente ao cenário de intervenção.

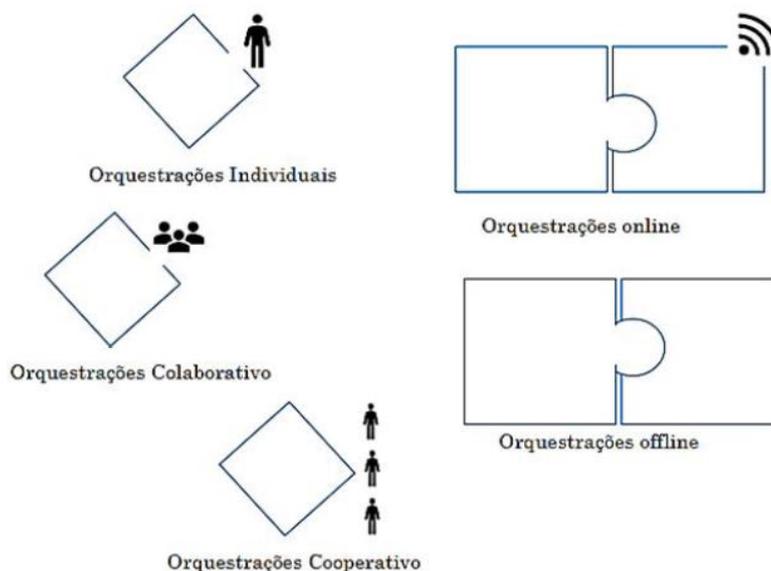
## 2.5 ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE

Levando em consideração o contexto de ensino remoto, Gitirana e Lucena (2021), respaldadas pela definição de OI proposta por Trouche (2004b), propõem a seguinte noção de Orquestração Instrumental On-line:

Uma Orquestração Instrumental On-line (OI on-line) é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos, seres humanos e tempo) de um ambiente formado por **diferentes espaços, geográficos e virtuais**, todos conectados, realizado por agentes (professor(es) e monitor(es)) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar de **forma remota, síncrona e/ou assíncrona**, seus aprendizes em suas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos (Ibidem, p. 376, grifo das autoras).

Os grifos nessa definição justificam-se pelos aspectos a serem levados em consideração na elaboração de uma OI on-line. Assim, como ilustrado a seguir (Figura 9), o modelo da OI On-line foi desenvolvido para a modalidade de ensino remoto, destacando os modos (on-line e offline) como uma OIO pode ser executada, os formatos das aulas (síncronas e assíncronas), como também, as formas de trabalho (individual, colaborativa ou cooperativa) que podem ser realizadas pelos sujeitos envolvidos nesta OI (GITIRANA; LUCENA, 2021).

**Figura 9** – Tipos de orquestrações instrumentais remotas e modos de trabalho



**Fonte:** Gitirana e Lucena (2020, p.5).

Como apresentado na Figura 9, temos dois tipos de OI remota: a on-line e a off-line. Segundo Gitirana e Lucena (2021), a OI on-line pode ser desenvolvida em tempo real ou em tempos distintos, dependendo da situação em jogo, porém, precisa de internet. Enquanto a OI off-line não necessita de internet, devendo ser executada com base nas proposições e orientações propostas pelo professor. Além disso, no que concerne ao modo de trabalho, que os alunos podem adotar, as sujeitas-autores categorizam as seguintes: individual – cada um trabalha sozinho; colaborativa – todos trabalhando em conjunto com foco em um objetivo comum, embora desempenhem diferentes papéis; e cooperativo – os participantes se dividem para a concretização do trabalho.

Um elemento substancial, no contexto do ensino on-line, discutido por Gitirana e Lucena (2021) é a constituição do espaço físico da OI on-line, que, na referida modalidade de ensino, a geografia do espaço não é mais física (isto é, presencialmente), mas sim virtual. Desse modo, deve-se considerar diversos aspectos particulares no ensino on-line, são eles: o contexto sociocultural, o contexto socioeconômico, o contexto dos artefatos digitais e não digitais emergentes e as condições de conexão (GITIRANA; LUCENA, 2021).

Quanto à prática pedagógica, devemos levar em conta as particularidades da modalidade de ensino on-line, uma vez que o professor não possui mais livre acesso aos mesmos espaços, artefatos, etc. do ensino presencial. Um exemplo disso é que, na modalidade presencial, o professor pode fazer uso de materiais manipulativos para o desenvolvimento de uma orquestração instrumental. Já na aula on-line o professor disponibiliza diversos artefatos digitais. Assim sendo, surge a necessidade de elaborar e compartilhar, antes da aula, um

*protocolo de orientação* aos alunos contendo os materiais necessários para a participação na aula, bem como a organização e a conduta a ser adotada para se planejar e acessar o ambiente virtual. Ou seja, é fundamental elucidar, previamente, a configuração didática e o modo de execução da OI on-line.

Alguns trabalhos têm abordado o modelo teórico da Orquestração Instrumental para experiências na modalidade on-line, tais como os dispostos no Quadro 6:

**Quadro 6** – Pesquisas fundamentadas na Orquestração Instrumental na modalidade on-line

<b>Título</b>	<b>Autoria</b>	<b>Ano</b>
Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto	GITIRANA, V.; LUCENA, R.	2021
Orquestração instrumental on-line para a aprendizagem de função no contexto de ensino remoto	MUNIZ, M.; GITIRANA, V.; LUCENA, R.	2021
Orquestração instrumental com o GEOGEBRA: uma abordagem de função afim	SILVA, L. G. V.	2021
Aprendizagem no ensino remoto: a gênese instrumental de licenciandos com o GeoGebra em dispositivos móveis	SILVA, T. T. X.	2021
Aprendizagem cooperativa baseada em problemas e orquestração instrumental no ensino de cálculo	FEITOSA, F. E. S.; RODRIGUES, R. S.	2021
Laboratório de Ensino de Matemática no âmbito do PARFOR: um olhar à luz da Orquestração Instrumental	FEITOSA, F. E. S.; VALENTE, A. A. P.	2021
Orquestração Instrumental e Engenharia Didática: um contributo para o ensino de funções reais de uma variável real	FEITOSA, F. E. S.	2022

**Fonte:** Acervo da pesquisa.

No artigo intitulado por “Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto”, Gitirana e Lucena (2021) ampliam o modelo da Orquestração Instrumental, introduzindo a noção de Orquestração Instrumental On-line desenvolvida no contexto de ensino remoto-emergencial e, por conseguinte, para o futuro do ensino on-line. Partindo da pretensão de retomar os aspectos já apontados na Orquestração Instrumental e as divergências que emergiram nessa nova modalidade de ensino, Gitirana e Lucena (2021) apontam as características específicas da configuração didática on-line por meio dos dados coletados no projeto de extensão “GERE às terças”, oficinas de formação de professores,

desenvolvidas no seio do Grupo de Estudos sobre Recursos para a Educação (GERE). Dentre as análises, as autoras constataram as características da noção de OI On-line nas oficinas, destacando a flexibilidade, as modificações nos espaços geográficos da sala de aula, a importância de estabelecer articulações entre as OI's e os protocolos dos participantes da oficina (cursistas, monitores e formadores) (GITIRANA; LUCENA, 2021).

No trabalho recorte de uma dissertação, Muniz, Gitirana e Lucena (2021) tiveram por objetivo elaborar, implementar e analisar uma orquestração instrumental on-line para a aprendizagem de funções, por meio de duplas colaborativas, dando ênfase na resolução de uma atividade no cenário do ensino remoto. Para tanto, a situação apresentada às duplas foi adaptada de uma questão da OBMEP. Como resultados, os autores destacam que o trabalho possibilitou às duplas colaborativas (futuros professores): vivenciar as possíveis dificuldades que os seus alunos podem se deparar em um ambiente virtual, experienciar o trabalho em conjunto, mobilizar diversas concepções que permitiram o desenvolvimento de instrumentos coletivos de resolução da situação matemática.

Em sua monografia, Silva (2021a) define como objetivo elaborar e analisar uma composição de três orquestrações instrumentais, realizadas em um ambiente virtual, para o trabalho de conceitos essenciais de função afim. A intervenção ocorreu em uma turma com alunos do 1º ano do Ensino Médio, organizados em grupos colaborativos, por meio de encontros síncronos com uso do GeoGebra como artefato digital de destaque. O autor ressalta, nos resultados, que a utilização do GeoGebra possibilitou a compreensão dos conceitos trabalhados.

Silva (2021b), em sua monografia, apresenta como objetivo central compreender o desenvolvimento das gêneses instrumentais de licenciandos na aprendizagem de vetores com o uso do GeoGebra em dispositivos móveis. Para isso, o autor realizou uma oficina de extensão, tomando como base o modelo da Orquestração Instrumental On-line, no âmbito de um projeto de pesquisa e inovação, desenvolvido para minimizar a exclusão digital de alguns graduandos. Dentre os principais resultados, Silva (2021b) identifica os esquemas de uso que os dois licenciandos (um em Matemática e outro em Física) já tinham e como esses esquemas foram mobilizados por eles em situações sobre o tema vetores e o uso das ferramentas do GeoGebra.

Feitosa e Rodrigues (2021) buscaram analisar o processo de concepção e aplicação de uma orquestração instrumental, na modalidade remota, com foco no desenvolvimento da habilidade de solucionar problemas de otimização. Para tanto, os autores utilizaram a metodologia de Aprendizagem Cooperativa Baseada em Problemas, cujos participantes foram 21 licenciandos em Matemática, divididos em grupos. As atividades ocorrem em momentos síncronos e assíncronos. Como resultados, os autores pontuam que grande parte dos

licenciandos se interessou pelo trabalho em grupo, desenvolvendo a habilidade de resolver problemas de otimização. Ademais, de acordo com Feitosa e Rodrigues (2021), constatou-se uma melhoria na aprendizagem e a diminuição da evasão dos discentes.

Em seu artigo, Feitosa e Valente (2021) objetivam analisar uma orquestração instrumental, implementada na modalidade on-line, na disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). A pesquisa-ação foi realizada em uma turma, com 11 licenciandos em Matemática. Dentre as análises, os autores apontaram que, embora os discentes tivessem dificuldades com o acesso à internet de qualidade e os estudos na graduação, a orquestração instrumental apresentou-se como uma boa proposta para trabalhar a disciplina LEM.

Feitosa (2022) objetivou apresentar uma orquestração instrumental, implementada na modalidade de ensino remota, com ênfase no ensino de funções reais de uma variável real. A ação ocorreu em uma turma com 24 licenciandos em Matemática, na disciplina de Cálculo de uma universidade pública da rede federal. O autor toma como base várias fundamentações teóricas para analisar os dados: a metodologia da Engenharia Didática, a Teoria dos Registros das Representações Semióticas e a Teoria das Situações Didáticas. No que diz respeito aos resultados quanto à OI, Feitosa (2022) aponta a exploração de vários recursos para a aprendizagem estudantil, tais como: a utilização do Geogebra, a entrega de resumos como atividade pré-aula e a obrigatoriedade da resolução e entrega de listas de exercícios como atividade pós-aula.

Mediante a descrição dos estudos supramencionados, convém ressaltar que o modelo proposto por Gitirana e Lucena (2021) foi implementado, originalmente, no contexto de formação continuada de professores, por meio de oficinas de extensão. Nesse sentido, a maioria das pesquisas elencadas (MUNIZ; GITIRANA; LUCENA, 2021; SILVA, 2021a; SILVA, 2021b; FEITOSA; RODRIGUES, 2021; FEITOSA; VALENTE, 2021; FEITOSA, 2021), envolvendo Orquestração Instrumental na modalidade on-line, tem a formação de licenciandos em Matemática como contexto de aplicação. No caso de Silva (2021a), o autor intervém no contexto do Ensino Médio. Assim como Silva (2021a), adotamos o modelo da OI on-line em uma intervenção com alunos da Educação Básica, o que nos possibilitou constatar aspectos particulares desta etapa de escolarização: o Ensino Fundamental.

### 3. METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos a natureza e o tipo da pesquisa, bem como, o cenário em que a pesquisa foi desenvolvida, os sujeitos envolvidos e os procedimentos para construção e análise de dados.

#### 3.1 NATUREZA E TIPO DA PESQUISA

Partindo do pressuposto que o professor pode adotar uma postura reflexiva e investigativa em sua prática profissional, o autor do presente trabalho buscou compreender sua própria prática pedagógica enquanto estagiário de Matemática em uma escola campo do estágio curricular, na sua formação inicial docente. Particularmente, temos como objetivo geral: Analisar o processo de concepção e implementação de orquestrações instrumentais on-line para o estudo da relação de igualdade em uma aula remota com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Desse modo, o tipo de pesquisa adotado neste estudo foi pesquisa-ação. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2012), esse tipo de investigação consiste em articular a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa.

A pesquisa-ação é um tipo especial de pesquisa participante, em que o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 112).

Ao discutir sobre a pesquisa na perspectiva dos professores escolares, Fiorentini e Lorenzato (2012) defendem que, apesar do ensino e da pesquisa serem práticas indissociáveis, elas são distintas e, logo, possuem diferentes objetivos. Desse modo, conforme os sujeitos-autores, faz-se necessário delinear essas diferenças, principalmente quando o objeto de estudo do docente é sua própria prática educativa.

Podemos afirmar que, como *educador*, o objetivo do professor é desenvolver uma prática pedagógica inovadora em matemática (exploratória, investigativa, problematizadora, crítica etc.) que seja mais eficaz possível do ponto de vista da educação/formação dos alunos. Porém, como *pesquisador*, seu objetivo é sistematizar, analisar e compreender como acontece esse processo educativo dos alunos ou quais os limites e suas potencialidades didático-pedagógicas dessa prática inovadora. Ou seja, a pesquisa visa extrair lições, aprendizagens ou conhecimentos das experiências docentes (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 76).

Como podemos perceber, a pesquisa-ação caracteriza-se como uma pesquisa de aprofundamento em unidades e não em pesquisas de generalização quantitativa de grandes

amostras. Portanto, a natureza desta investigação é qualitativa (LUDKE; ANDRÉ, 1986), uma vez que “a pesquisa qualitativa ocupa um reconhecido lugar entre as várias possibilidades de se estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes” (GODOY, 1995, p. 91).

Dito isso, passamos a apresentar, no próximo tópico, o cenário da pesquisa.

### 3.2 CENÁRIO DA PESQUISA

A pesquisa se desenvolveu em uma escola pública da rede federal de ensino – localizada no município de Recife, no estado de Pernambuco –, no contexto do Estágio Supervisionado Obrigatório (ESO) da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).

A intervenção foi delineada no período de ensino remoto no primeiro semestre de 2021, correspondente ao semestre letivo de 2020.1 na UFRPE. Na ementa do ESO III, é prevista que: a intervenção deve ocorrer em sala de aula da escola campo do estágio, estritamente nas turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, por intermédio da realização de observação-participante e regências quanto à disciplina correspondente à área de conhecimento da formação docente. O ESO III possui carga horária de 120h, sendo 90h de práticas e 30h teóricas. Na dimensão prática, o estagiário precisa realizar as atividades de observação, planejamento e regência de sala de aula na escola campo, supervisionadas por um professor-supervisor. Já na dimensão teórica o estagiário participa dos encontros das aulas da universidade ministradas por um professor-orientador.

O estágio na escola campo teve vigência de 01.05.2021 a 16.07.2021, que foi exatamente o início e o término do período letivo de acordo com o Calendário Acadêmico da instituição de ensino. Na escola campo de estágio, as aulas também estavam acontecendo no formato remoto. Devido à brevidade do calendário acadêmico, que atrasou por conta da pandemia da COVID-19, o estagiário tinha que efetivar as regências das aulas síncronas no mínimo 2 horas-aula e no máximo 5 horas-aula. Assim sendo, o restante da carga horária de regência deveria ser composto por outras atividades de regência. O que nos levou a realizar as atividades de observação, planejamento e regência em duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental, no período da manhã da terça-feira, quinta-feira e sexta-feira.

Em particular, apresentamos neste trabalho o processo de elaboração e implementação de orquestrações instrumentais on-line para uma aula sobre o tema relações de igualdade com uma das turmas do 6º ano.

### 3.3 PARTICIPANTES DA PESQUISA

Como já dito, na escola campo do estágio, havia duas turmas (A e B) do 6º ano do Ensino Fundamental. A escolha pela turma A ocorreu em virtude de termos acompanhado mais as aulas de Matemática nessa turma. No caso da turma do 6º ano A, ela tinha aulas, com duração de 1h cada uma, na terça-feira e na quinta-feira. Além disso, na sexta-feira, os alunos dessa turma com dificuldades na disciplina tinham 1h de Oficina de Matemática.

Nessa turma, havia 27 alunos matriculados, sendo que, no ensino remoto, a turma estava sendo dividida em dois grupos (um constituído por 13 alunos e o outro por 14) e cada grupo tinha aula de Matemática uma vez por semana, pois enquanto um grupo estava na aula de uma disciplina o outro grupo estava em outra. Assim, o estagiário implementou as orquestrações instrumentais on-line com os dois grupos da turma A, em dias distintos. Neste trabalho, apresentamos e analisamos os resultados de uma aula on-line com a participação do grupo com 13 alunos. A escolha por analisar a aula desse grupo específico ocorreu pelos efeitos da implementação das orquestrações, nas relações estabelecidas entre o estagiário, os alunos e o professor-supervisor, para a discussão sobre as relações de igualdade no ensino da álgebra escolar.

### 3.4 PROCEDIMENTOS DE CONSTRUÇÃO DOS DADOS

Apresentamos neste tópico os procedimentos de construção dos dados, levando em conta os objetivos específicos da pesquisa:

- Conceber configurações didáticas e modos de execuções para a aula on-line sobre relação de igualdade e a noção de equivalência;
- Analisar as performances didáticas que emergiram durante a aula on-line sobre relação de igualdade e a noção de equivalência.

#### 3.4.1 Seleção dos artefatos para o estudo do tema na aula on-line

Para o estudo do tema “Relações de Igualdade” no 6º ano, buscamos contemplar a habilidade (EF06MA14PE) do CPE que corresponde à habilidade (EF06MA14) da BNCC:

Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas (**por exemplo, explorando a metáfora da balança**). (BRASIL, 2018, p. 303; PERNAMBUCO, 2019, p. 121, grifo nosso.)

Inicialmente, para a aula sobre o tema “Relações de Igualdade”, elaboramos cinco *slides* com questões envolvendo o cálculo do termo desconhecido, um slide com uma figura de uma balança de dois pratos, uma situação-problema envolvendo o saber matemático em cena, para ser resolvida com o EIB. No Quadro 7, ilustramos esses slides:

**Quadro 7** – Slides elaborados para a aula on-line

<p>RELAÇÕES DE IGUALDADE</p> <p>Professor: Matheus Almeida</p>	$103 + \square = 163$	$12 \times \square = 60$
$4 \times \square = 16$	$50 \times \square = 500$	$10 \times \square = 350$
	<p><b>PROBLEMA</b></p> <p>João foi desafiado a descobrir a massa de um cubo azul. O cubo está em uma balança de pratos, junto com nove bolinhas (todas com 1g de massa). Ajude João a resolver isso sabendo que tem três bolinhas no mesmo prato do cubo e seis bolinhas no outro.</p>	<p><b>Resolução:</b></p> <hr/>

**Fonte:** Acervo da pesquisa (2021).

Outro artefato selecionado para aula foi um vídeo disponível no YouTube<sup>8</sup> tratando sobre “Equação e balança de dois pratos”. O vídeo possui duração de 9 minutos e 26 segundos, mas foi pensado pelo estagiário para expor até 1 minuto e 25 segundos, porque é a parte inicial do vídeo que trata sobre a balança de dois pratos. A partir disso, o estagiário visou explicar como esse artefato pode ser utilizado como uma analogia à igualdade matemática.

Para o uso do EBI, recorreremos aos subtipos da tarefa *T – Elaborar e resolver problemas com o uso do Explorador da Igualdade Básico*, que foram identificados na pesquisa do PIBIC, conforme apresentamos no Quadro 5, localizado no Capítulo 1. Recapitulando, temos:

- **t<sub>1</sub>**: Mostrar, por meio da balança interativa, uma relação de igualdade entre quantidades equivalentes de objetos.
- **t<sub>2</sub>**: Determinar, por meio da balança interativa, diferentes sentenças de adições de

<sup>8</sup> Link do vídeo: <https://www.youtube.com/watch?v=4cLpcQ4kK-M&t=85s>.

objetos que resultem na mesma soma.

- **t<sub>3</sub>**: Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se adiciona um mesmo objeto a cada membro.
- **t<sub>4</sub>**: Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se subtrai um mesmo objeto a cada membro.
- **t<sub>5</sub>**: Determinar o termo desconhecido, em uma relação de igualdade envolvendo adição e subtração, por meio da balança interativa.
- **t<sub>6</sub>**: Determinar o termo desconhecido em uma relação de igualdade envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, por meio da balança interativa.

### 3.4.2 Planejamento das orquestrações

Ressaltamos que, no planejamento da aula síncrona, o estagiário elaborou orquestrações instrumentais on-line (OIO's) para o estudo das relações de igualdade, em parceria com a professora-orientadora da universidade e o professor-supervisor da escola campo. O conhecimento sobre o modelo da Orquestração Instrumental e a experiência em sala de aula de Matemática, por parte da professora-orientadora e do professor-supervisor, foram indispensáveis nas discussões para aprimorar o planejamento do estagiário.

A aula foi pensada para ser realizada no formato da composição de três OIO's sequenciadas imediatas (Figura 10), a serem executadas uma depois da outra, isto é, com um tempo sequencial, como indicam Lucena (2018).

**Figura 10** – Composição das OIO's sequenciadas imediatas



**Fonte:** Elaborada pelos autores (2022).

Para a implementação dessa composição das OIO's sequenciadas imediatas (Figura 10), foi prevista uma aula síncrona, com duração de 1h, por meio do *Google Meet*, a ser realizada em tempo real, precisando que os participantes tivessem acesso a aparelhos eletrônicos (notebook, computador, celular ou tablet) e à internet.

Como vimos, as orquestrações quando são coletivas, podem ter o modo de trabalho entre os sujeitos classificados como: cooperativo ou colaborativo (GITIRANA; LUCENA, 2021). No

nosso caso, o modo de trabalho entre o estagiário, o professor-supervisor e os alunos, para a realização das OIO's, foi definido como colaborativo, porque todos trabalharam em conjunto em torno de uma situação matemática.

Inspirados por Muniz, Gitirana e Lucena (2021), na configuração didática de cada OIO, buscamos elucidar as relações entre: os artefatos, os papéis dos sujeitos envolvidos, as principais ações e o tempo de duração. Em seguida, pré-definimos o modo de execução de cada orquestração.

Na OIO “Orientação e explicação pelo professor” (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017), foi planejado que o estagiário iria introduzir a aula recepcionando os alunos, para então apresentar o tema da aula. Em seguida, o estagiário deveria abordar sobre a igualdade matemática e o cálculo do termo desconhecido, instigando os alunos a responderem tarefas sobre o tema. Para tanto, essas tarefas seriam compartilhadas por meio de slides durante a videoconferência no Google Meet. Ademais, seria explicada, nessa OIO, a analogia entre a igualdade e a balança de dois pratos, tomando como motivação parte de um vídeo disponível no Youtube. A previsão da duração dessa OIO foi de 20 minutos.

Na OIO “Demonstração técnica” (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017), foi planejado que o estagiário iria apresentar as ferramentas e funcionalidades do Explorador da Igualdade Básico, destacando os aspectos ostensivos que contribuem para o trabalho com as relações de igualdade através das simulações interativas com o referido artefato. Para essa OIO, foi previsto que o estagiário deveria disponibilizar, previamente, o link para os alunos acessarem o artefato digital e simularem, concomitantemente, com a demonstração técnica do EIB. A previsão da duração da OIO foi de 10 minutos.

Na OIO “Discussão entre atores” (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017), foi planejado que os alunos iriam realizar simulações interativas, em seus próprios aparelhos eletrônicos, com o uso do EIB. Por conseguinte, alguns alunos iriam explicar para a turma o que haviam explorado enquanto o estagiário simulava a situação e compartilhava a tela com os outros alunos, a fim de socializar e discutir sobre as relações de igualdade com o grupo em geral. Além disso, o estagiário iria retomar alguma situação matemática vista na demonstração técnica para aprofundar a reflexão acerca da temática. Por fim, seria apresentada por meio do slide uma situação-problema para ser interpretada e resolvida pelos alunos com o uso do EIB. A previsão da duração da OIO foi de 30 minutos.

Nas três OIO, o papel do professor-supervisor seria de acompanhar a implementação das OIO's e intervir nos momentos necessários (tais como: acompanhar os comentários durante a videoconferência, pontuar em algum aspecto da discussão sobre o tema, etc.), dando auxílio

ao estagiário e aos alunos. Convém ressaltar que as possíveis intervenções não foram discutidas pontualmente entre o estagiário e o professor-supervisor antes da aula.

### 3.5 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DADOS

Partindo da concepção de pesquisa-ação nos processos educacionais, levamos em conta no percurso de análise dos dados o seguinte:

[...] o professor reflexivo poderá vir a ser também pesquisador de sua prática se ele tentar sistematizar suas experiências e socializar ou compartilhar seus saberes com os outros professores. Essa sistematização exige que o professor, a partir de uma determinada perspectiva (recorte, foco ou questão), faça registros escritos, organize suas ideias e revise suas práticas e as analise, buscando/produzindo, assim, uma melhor compreensão do seu trabalho docente. (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 77).

Na primeira etapa da análise de dados, levantamos os artefatos produzidos no ESO pelo estagiário, em uma pasta do seu *drive* que continha: um arquivo com o planejamento das OIO's, um arquivo com as descrições das observações das aulas do professor-supervisor, um arquivo com os slides, um arquivo com uma atividade sobre relações de igualdade e um arquivo com o resumo expandido apresentado no evento da escola sobre a experiência da regência. Esses dados nos permitiram detalhar melhor, nos resultados, os dois primeiros componentes das OIO's: configurações didáticas e modos de execuções.

Na segunda etapa da análise de dados, retomamos o diário de bordo do estagiário, que foi o principal artefato da coleta de dados. Nesse diário, o estagiário descreveu, após a aula remota, os principais momentos das OIO's, principalmente aqueles que permitiam ampliar a discussão sobre as relações de igualdade no ensino da álgebra escolar, bem como fatores específicos da modalidade de ensino on-line (interações pelo chat, pelo microfone etc.). Os aspectos levantados neste diário foram: as performances didáticas, por meio da identificação de reações *ad hoc* e decisões *ad hoc*, pelos imprevistos ocorridos diante do que havíamos planejado.

Na terceira e última etapa da análise de dados, recapitulamos as capturas de tela das simulações, propostas pelo estagiário e pelos alunos, com o Explorador da Igualdade Básico, e as capturas de tela de alguns momentos da aula. Tais capturas foram tiradas pelo estagiário durante a aula remota e, posteriormente, editadas para preservar o anonimato dos participantes. Portanto, nas capturas das aulas, apresentadas nos resultados, temos o estagiário (com a imagem identificada); os alunos (identificados com a “carinha azul”) e o professor (identificado com a “carinha verde”). No caso dos participantes com a câmera ligada, temos “fundo branco” por

trás da “carinha”. Essas capturas foram fundamentais para ilustrar os resultados da pesquisa. Ademais, para os relatos das participações de alguns alunos que interagiram na aula, utilizamos codinomes para preservar a identidade deles.

Em suma, nas análises das OIO’s, pomos em relevo, além das relações entre os artefatos, os papéis dos sujeitos, as ações e o tempo, a necessidade de elencar os momentos dessas relações em cada OIO, a fim de elucidar a descrição das OIO’s. E mais, destacamos a classe de situação de cada OIO, assim como os objetivos de aprendizagem.

## 4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos a análise e discussão dos resultados acerca das orquestrações instrumentais on-line (OIO's) realizadas com alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental. Expomos a composição das OIO's, detalhamos como cada uma delas aconteceu.

### 4.1. OIO “ORIENTAÇÃO E EXPLICAÇÃO PELO PROFESSOR”

Na OIO “Orientação e explicação pelo professor” (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017), o estagiário, inicialmente recepcionou os alunos, para, em seguida, introduzir o tema da aula e mediar a discussão sobre o tema *Relação de Igualdade*. Desse modo, temos que a **classe de situação** é: relação de igualdade e o cálculo do termo desconhecido. E, os **objetivos** são: 1) Interpretar o sinal “=” em uma perspectiva relacional; 2) Desenvolver a noção de equivalência por meio do estudo das relações de igualdade.

No Quadro 8, destrinchamos as relações entre: os artefatos, os papéis dos sujeitos envolvidos, as principais ações e o tempo de duração. Ademais, elencamos os momentos dessas relações na OIO “Orientação e explicação pelo professor”.

**Quadro 8** – Configuração didática da OIO “Orientação e explicação” implementada

Artefatos	Papéis do estagiário, do professor-supervisor e dos alunos	Ações	Tempo	Momentos
Link da videoconferência disponibilizado no Google Classroom + Videoconferência por meio do Google Meet	<p><b>Professor-supervisor:</b> disponibilizar, previamente, o link da videoconferência por meio do Google Classroom para os alunos. Liberar a entrada dos alunos na turma.</p> <p><b>Estagiário:</b> disponibilizar, previamente, as instruções da aula no Google Classroom. Recepcionar os alunos na aula síncrona.</p> <p><b>Alunos:</b> ler, previamente, as instruções da aula. Entrar no encontro síncrono.</p>	O professor-supervisor, o estagiário e os alunos entram na sala de aula por meio do link para aula de Matemática.	5 min.	1º momento

Videoconferência por meio do Google Meet + Apresentação por meio do Google Slides	<p><b>Estagiário:</b> compartilhar os slides com os alunos, por meio do Google Meet, propor questionamentos sobre as relações de igualdades e mediar a discussão.</p> <p><b>Alunos:</b> participar da discussão inicial sobre as relações de igualdade e o cálculo do termo desconhecido.</p> <p><b>Professor-supervisor:</b> intervir em momentos necessários, propor questionamentos e auxiliar os alunos e o estagiário.</p>	O estagiário introduz a aula propondo questionamentos aos alunos, para eles responderem.	8 min.	2º momento
Videoconferência por meio do Google Meet + Apresentação por meio do Google Slides + Vídeo por meio do YouTube	<p><b>Estagiário:</b> apresentar o vídeo disponível no YouTube para relacionar a balança de dois pratos com o tema em discussão.</p> <p><b>Alunos:</b> assistir o vídeo.</p> <p><b>Professor-supervisor:</b> observar o andamento da aula.</p>	O estagiário pergunta se os alunos conhecem a balança de dois pratos. Os alunos respondem se eles conhecem ou não. O estagiário apresenta o vídeo disponível no YouTube para a explicação do tema.	3 min.	3º momento

**Fonte:** Elaborado pelos autores (2022).

Para o início da aula síncrona, o professor-supervisor e o estagiário estabeleceram cinco minutos de tolerância para o acesso dos alunos na turma. Nesse primeiro momento, o professor-supervisor liberava o acesso dos alunos na videoconferência e o estagiário recepcionou os alunos, com a câmera e o microfone ligados, até às 8h05, como previsto no planejamento da aula.

No segundo momento, com a câmera e o microfone ligados, o estagiário introduziu a aula propondo questionamentos sobre as relações de igualdade aos alunos, para eles responderem, por meio do microfone ou chat, com a câmera ligada ou não, ficando a critério deles decidirem. Ao apresentar o tema da aula, o estagiário questionou os alunos quanto ao que eles pensam quando ouvem falar sobre “Relação de Igualdade”. Dois alunos responderam à pergunta indicando que seria quando duas operações têm o mesmo resultado. Como exemplo, a aluna Juliana disse o seguinte:  $7 + 5 = 12$  e  $4 \times 3 = 12$ . Podemos perceber, nesse exemplo de Juliana, uma abordagem introdutória do trabalho envolvendo a relação de equivalência, uma vez que partindo das hipóteses apresentadas pela aluna, é possível concluir que  $7 + 5 = 4 \times 3$ .

Ainda na introdução da aula, o estagiário recapitulou algumas tarefas (Quadro 9), compartilhadas com os alunos no *Google Meet* por meio do *Google Slides*.

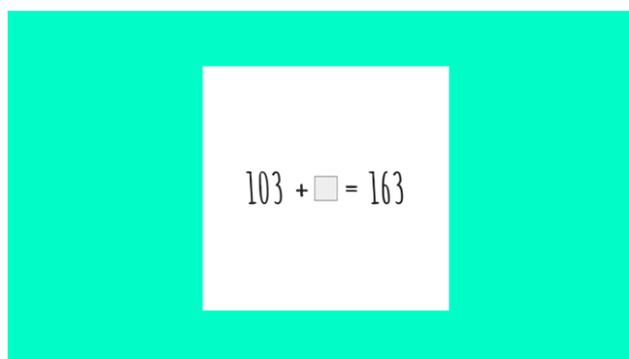
**Quadro 9** – Algumas relações de igualdade propostas na introdução da aula

$103 + \square = 163$
$12 \times \square = 60$
$4 \times \square = 16$
$50 \times \square = 500$
$10 \times \square = 350$

**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Como dispostas no Quadro 9, cinco tarefas foram retomadas, envolvendo o cálculo do termo desconhecido por meio das relações de igualdade, a fim de utilizar as visões dos alunos acerca do tema em tela como ponto de partida para as reflexões em aula. Na Figura 11, ilustramos como a situação matemática foi proposta aos alunos:

**Figura 11** – Exemplo de uma lauda dos slides



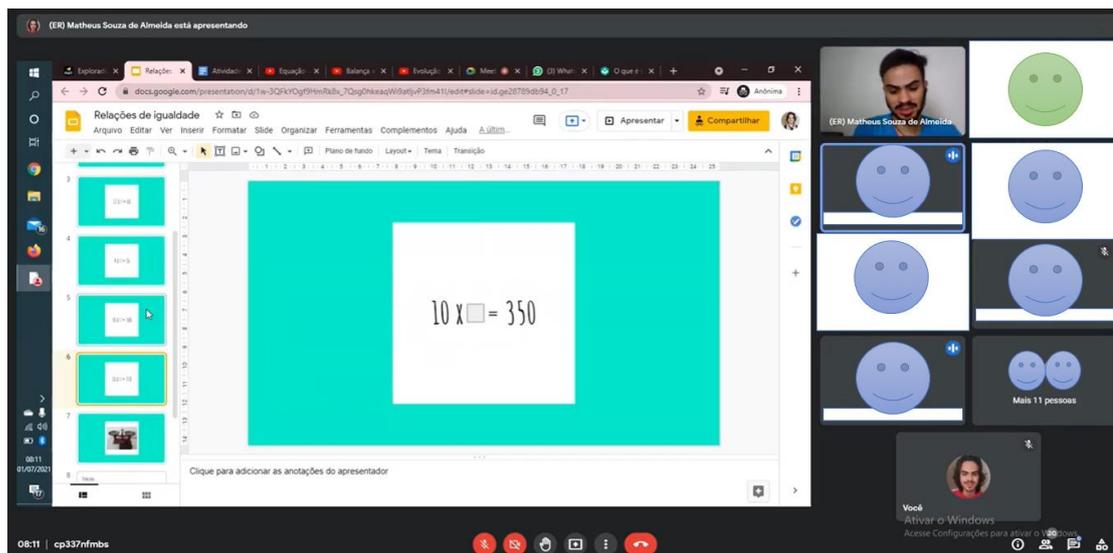
**Fonte:** Acervo da pesquisa.

A respeito do exemplo apresentado na Figura 11, quando os alunos foram questionados pelo estagiário sobre o valor do termo desconhecido, Juliana respondeu que era 60, justificando que, para obter o resultado, era necessário calcular a operação inversa:  $163 - 103 = 60$ . Já o aluno Pedro respondeu o mesmo, com este argumento: de 103 para 163 é 60.

Enquanto na tarefa  $12 \times \square = 60$ , o aluno Breno disse que a resposta seria 5, porque 12 multiplicado por 5 é 60. De fato, a afirmativa do Breno não é falsa, mas ele não justificou como realizou essa multiplicação. Em contrapartida, Juliana justificou, utilizando novamente a noção de operação inversa, que:  $60/12 = 5$ .

Na Figura 12, ilustramos esse segundo momento. Pode-se perceber os artefatos em cena (os slides, Google Meet etc.) e os sujeitos envolvidos: o estagiário, os alunos e o professor-supervisor.

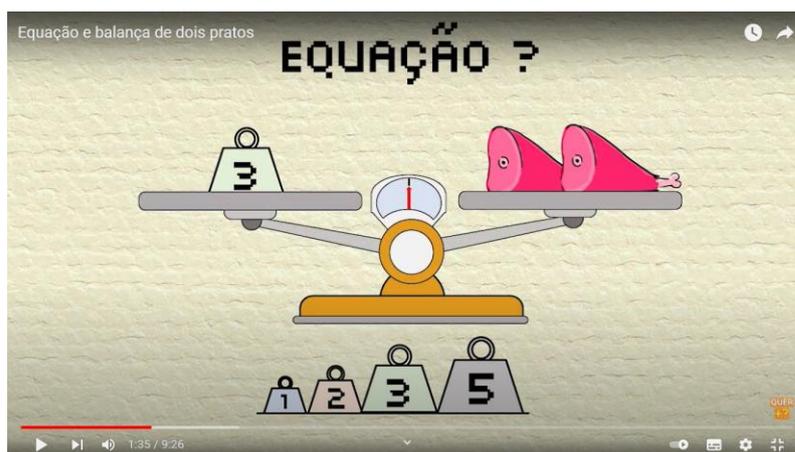
**Figura 12** – Exemplo da OIO “Orientação e explicação pelo professor” no 2º momento



**Fonte:** Acervo da pesquisa (2022).

No terceiro momento, foi apresentado parte do vídeo disponível no *YouTube* (Figura 13) cujo título é “Equação e balança de dois pratos”, explicando a relação entre equação e a balança de dois pratos.

**Figura 13** – A noção de equilíbrio e a noção de equivalência através da balança



**Fonte:** Eutíquio (2021).

O trabalho com o vídeo foi essencial como ponto de partida para a OIO “Demonstração Técnica”, uma vez que os alunos puderam compreender melhor a metáfora da balança em analogia à igualdade matemática, a partir da explicação do estagiário de que cada prato da balança equivale a um membro da igualdade e quando a balança está equilibrada implica a dizer que há uma equivalência entre os pratos.

Grosso modo, partindo da discussão com os alunos acerca dos exemplos supramencionados, o estagiário reforçou que a noção de igualdade a ser trabalhada na aula é:

relacionar o que está em um lado do símbolo “=” com o que está do outro lado. Para tanto, foi recorrido à metáfora da balança de dois pratos. Quando indagados sobre o conhecimento desse recurso pelo estagiário, oito alunos responderam, pelo áudio e pelo *chat*, que o conheciam. Além disso, Pedro falou que seu avô possuía uma balança de dois pratos.

#### 4.2 OIO “DEMONSTRAÇÃO TÉCNICA”

Na OIO “Demonstração técnica” (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017), o estagiário apresentou aos alunos as ferramentas do EIB e suas funcionalidades. Então, temos a seguinte **classe de situação**: O uso do Explorador da Igualdade Básico. E, os **objetivos** foram: 1) Conhecer os aspectos ostensivos do EIB; 2) Compreender as ferramentas e funções do EIB; 3) Entender como realizar simulações interativas com o EIB.

No Quadro 10, apresentamos as relações entre: os artefatos, os papéis dos sujeitos envolvidos, as principais ações e o tempo de duração. Além disso, elencamos os momentos dessas relações na OIO “Demonstração técnica”.

**Quadro 10** – Configuração didática da OIO “Demonstração técnica” implementada

Artefatos	Papéis do estagiário, do professor-supervisor e dos alunos	Ações	Tempo	Momentos
Explorador da Igualdade Básico por meio da Plataforma PhET + Videoconferência por meio do Google Meet	<b>Estagiário:</b> disponibilizar o link do EIB, por meio do chat do Google Meet e apresentar as descrições gerais do recurso digital. <b>Professor-supervisor:</b> observar o andamento da aula. <b>Alunos:</b> responder o questionamento proposto pelo estagiário.	O estagiário disponibiliza o link do EIB, pergunta se os alunos conhecem o artefato digital e apresenta a eles as informações gerais do EIB.	2 min.	1º momento
Explorador da Igualdade Básico por meio da Plataforma PhET (modo básico) + Videoconferência por meio do Google Meet	<b>Estagiário:</b> compartilhar a tela do EIB com os alunos, por meio do Google Meet, apresentar suas ferramentas e funções no modo básico. <b>Alunos:</b> responder os questionamentos propostos pelo estagiário, tirar dúvidas sobre as ferramentas e funcionalidades do recurso. <b>Professor-supervisor:</b> intervir em momentos necessários, propor questionamentos e auxiliar no desempenho da aula.	O estagiário apresenta as ferramentas do EIB, no modo básico, e suas funções. Caso não entendam algo, os alunos perguntam ao estagiário.	2 min.	2º momento
Explorador da Igualdade Básico por meio da Plataforma PhET (modo	<b>Estagiário:</b> compartilhar a tela do EIB com os alunos, por meio do Google Meet, apresentar suas ferramentas e funções no modo laboratório. <b>Alunos:</b> responder os questionamentos	O estagiário apresenta as ferramentas do EIB, no modo lab, e suas funções. Caso	4 min.	3º momento

lab) + Videoconferência a por meio do Google Meet	propostos pelo estagiário, tirar dúvidas sobre as ferramentas e funcionalidades do recurso. <b>Professor-supervisor:</b> intervir em momentos necessários, propor questionamentos e auxiliar no desempenho da aula.	não entendam algo, os alunos perguntam ao estagiário.		
--	---	--	--	--

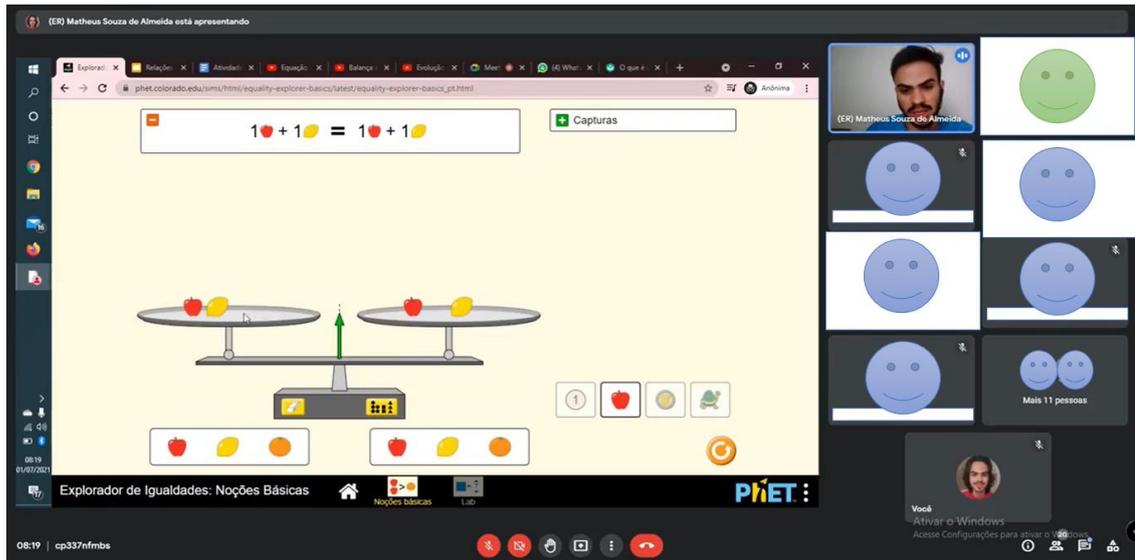
**Fonte:** Elaborado pelos autores (2022).

No primeiro momento, o estagiário introduziu a OIO “Demonstração técnica” explicitando para os alunos a função do EIB: trabalhar a ideia de equilíbrio e desequilíbrio em analogia, respectivamente, às noções de igualdade e desigualdade, por meio de situações a partir de simulações interativas. Em seguida, o estagiário disponibilizou o link do EIB disponível na plataforma PhET, através do *chat* do *Google Meet*, e falou para eles acessarem e explorarem o recurso digital concomitantemente à explanação em sala de aula.

Além disso, o estagiário perguntou aos alunos se eles conheciam o referido artefato. Antes que ele obtivesse as respostas dos alunos, o professor pediu licença para informar que três alunos estavam na aula errada e que a aula certa seria de Língua Portuguesa naquele mesmo horário. Diante dessa ocorrência, identificamos uma reação *ad hoc*, por parte dos alunos em participarem da aula de Matemática no horário da aula de outra disciplina, haja vista que o estagiário previa que os alunos da turma estariam em suas aulas corretamente. Assim, o estagiário permitiu o espaço solicitado pelo professor, por meio do microfone, para informar aos alunos sobre a incidência. Logo após, retomou a indagação de quem conhecia o EIB. Por meio do *chat*, um aluno respondeu que “sim” e três alunos responderam que “não”.

No segundo momento, o estagiário buscou apresentar as principais ferramentas do artefato digital, são os ostensivos:  $O_1$  – *Tipos dos objetos*;  $O_2$  – *Objetos a serem inseridos na balança*;  $O_3$  – *Balança de dois pratos*; e  $O_4$  – *Sinal de igualdade entre duas sentenças*. Como exemplo da configuração didática no segundo momento, temos:

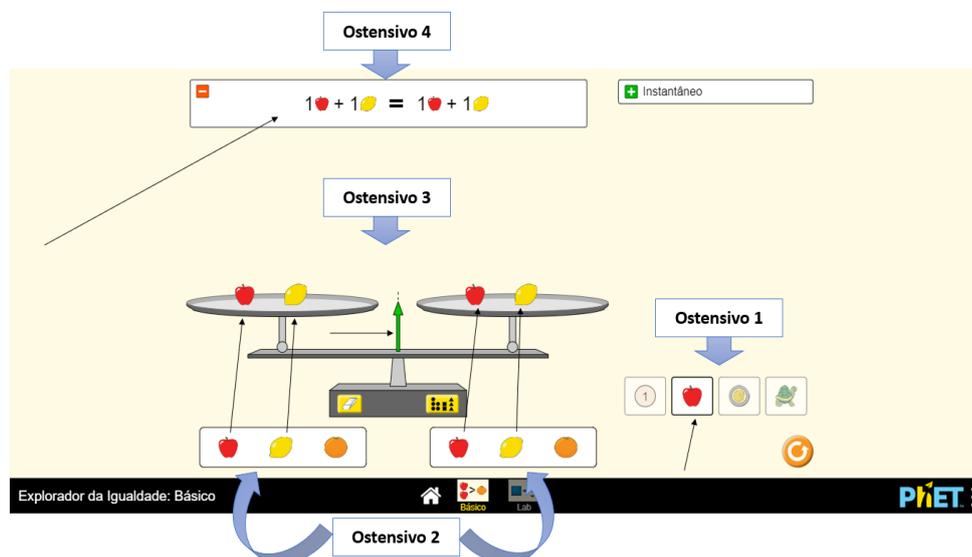
**Figura 14** – Exemplo do segundo momento da OIO “Demonstração técnica”



**Fonte:** Elaborada pelos autores (2022).

Na demonstração técnica do EIB no modo básico, o tipo de objeto ( $O_1$ ), escolhido pelo estagiário para inserir na balança, foi “frutas”. Para a simulação, foram inseridos 1 maçã e 1 limão ( $O_2$ ) em ambos os pratos da balança ( $O_3$ ). Nesse exemplo, temos uma situação de igualdade para a relação de igualdade, pois ambos os membros possuem objetos iguais. Com essa compreensão, o estagiário aponta com a seta do mouse para a seta verde da balança, a fim de sinalizar que ela está equilibrada. Em seguida, ele leva os alunos a verificar que, quando os pratos da balança ( $O_3$ ) estão em equilíbrio, podemos representar essa situação em uma sentença matemática com o uso do sinal “=”, apontando com a seta do mouse para o ostensivo 4. A seguir, ilustramos essa situação:

**Figura 15** – Demonstração técnica do EIB no modo básico

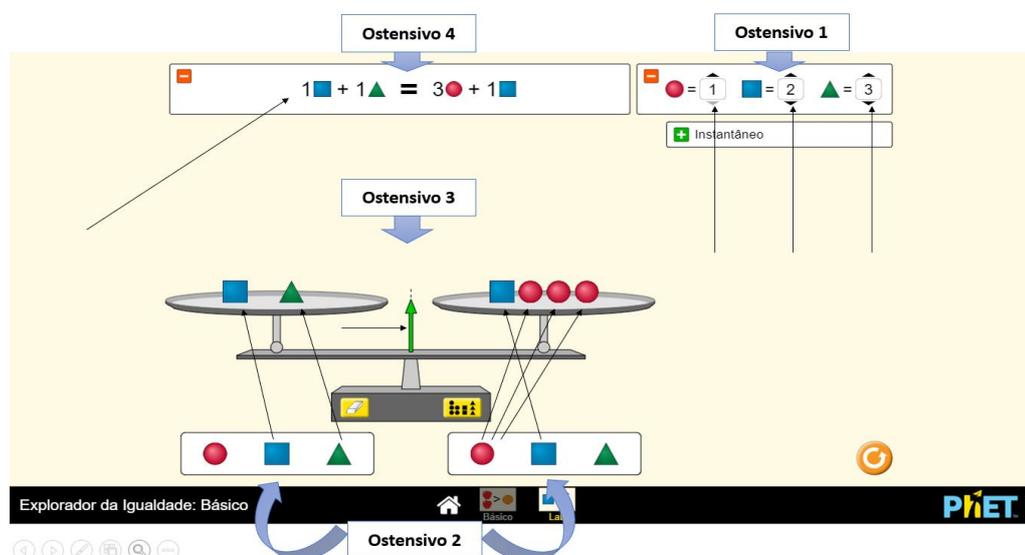


**Fonte:** Elaborada pelos autores por meio da Plataforma PhET (2022).

Na demonstração técnica do EIB no modo *lab*, o estagiário destacou, inicialmente, que os objetos ( $O_1$ ) disponíveis variam do valor de 1 a 20. Além disso, ele apresentou a ferramenta de captura, já que, posteriormente, ele precisaria dela para salvar as situações discutidas. Para a simulação, o estagiário inseriu o cubo e o tetraedro ( $O_2$ ), no lado esquerdo da balança, com os respectivos valores: 2 e 3. Além disso, ele pediu para que os alunos olhassem para o ostensivo 1 para compreender como ocorre o equilíbrio na balança. Após isso, o estagiário perguntou aos alunos o que colocar no lado direito da balança. Um aluno respondeu, por meio do microfone: um cubo e um tetraedro. Nesse cenário, é possível perceber que o aluno deu uma resposta trivial e propôs a propriedade reflexiva da igualdade. Ou seja, propôs uma situação de igualdade.

Após isso, um aluno e uma aluna responderam o seguinte: um cubo e uma esfera. O estagiário indagou se era somente isso, pontuando que a balança estava desequilibrada. Os alunos responderam para adicionar mais duas esferas ( $O_2$ ) no lado direito. E, assim, obteve-se o equilíbrio entre os dois lados da balança ( $O_3$ ). A partir disso, o estagiário explicou que havia uma situação de equivalência para a relação de igualdade apresentada. Essa situação foi capturada pela ferramenta “instantâneo” abaixo do ostensivo 1. Apresentamos a seguinte ilustração dessa situação:

**Figura 16** – Demonstração técnica do EIB no modo lab



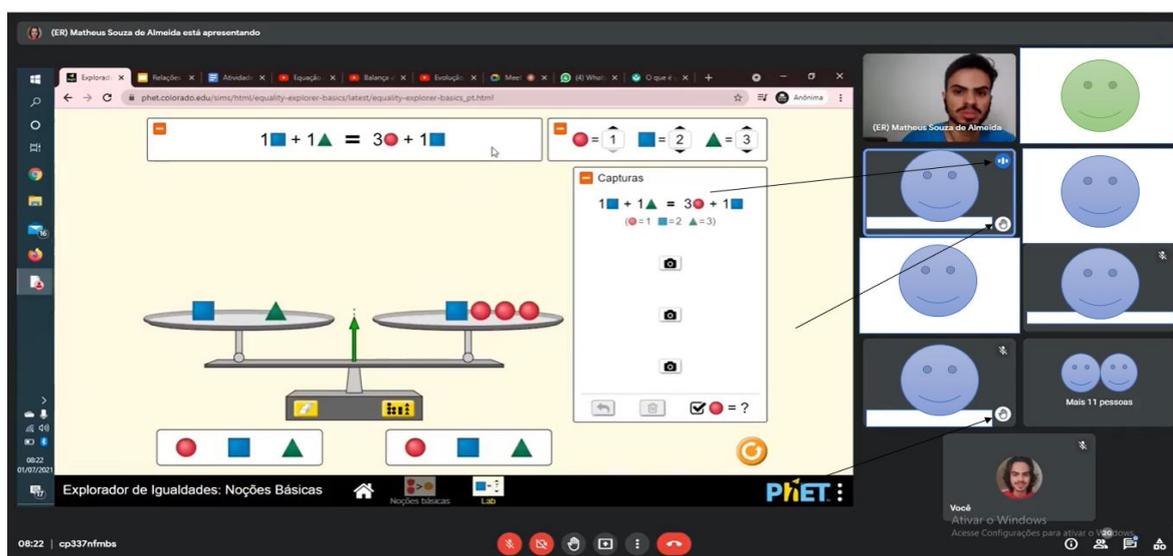
**Fonte:** Acervo da pesquisa (2022).

Por fim, assim como na demonstração técnica no modo básico, o estagiário levou os alunos a perceber que, quando os pratos da balança ( $O_3$ ) estão equilibrados, é possível

representar essa situação por meio de uma sentença matemática envolvendo o sinal “=”, sinalizando com a seta do mouse para o ostensivo 4.

Ademais, o professor informou ao estagiário que um aluno tinha levantado a mão (em referência à ferramenta do Google Meet), como pode-se observar na Figura 17. Essa ocorrência ilustra bem a importância do professor no auxílio da aula, porque a intervenção dele foi fundamental para que o estagiário soubesse o que estava acontecendo na videoconferência, já que ele estava focando na demonstração técnica do EIB.

**Figura 17** – Exemplo da OIO “Demonstração técnica” no 3º momento



**Fonte:** Acervo da pesquisa (2022).

Assim, o estagiário pediu para que o aluno falasse. João ligou o microfone e informou que estava com o artefato aberto em seu computador, mas não conseguiu acessar a página. O estagiário perguntou em qual página ele estava e o aluno disse que não estava conseguindo acessar o modo laboratório. Novamente, o estagiário disponibilizou o link da página em discussão, no chat do Google Meet. E, dessa vez, João conseguiu acessar.

No final da OIO “Discussão entre atores”, Juliana, que também estava com a mão levantada (ver Figura 17), abriu o microfone e disse que conseguiu encontrar uma relação de igualdade. A situação, apresentada pela aluna, foi o pontapé inicial para a realização da OIO “Discussão entre atores”, a qual detalhamos a seguir.

#### 4.3 ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL ON-LINE “DISCUSSÃO ENTRE ATORES”

Na OIO “Discussão entre atores” (DRIJVERS *et al.*, 2010; ROUSSON, 2017), os alunos propuseram exemplos de relações de igualdade, a partir das simulações interativas com o EIB,

pelos quais o estagiário buscou aprofundar as discussões em vista dos elementos das praxeologias matemáticas, em torno do uso do artefato digital para o estudo do tema, definidas por Oliveira, Almeida e Espíndola (2021) (Quadro 5). Por fim, o estagiário propôs um problema, para que os alunos utilizassem o artefato digital como integrante das técnicas de resolução.

Assim sendo, temos que a **classe de situação** é: elaboração e resolução de situações-problema sobre as relações de igualdade com o uso do Explorador da Igualdade Básico. E, os **objetivos** são: 1) passar pelo processo de gênese instrumental com o EIB; 2) compreender os princípios de equivalência; 3) compreender as propriedades de igualdade; 4) calcular termos desconhecidos nas relações de igualdade.

No Quadro 11, estabelecemos as relações entre: os artefatos, os papéis dos sujeitos envolvidos, as principais ações e o tempo de duração. Outrossim, elencamos os momentos dessas relações na OIO “Discussão entre atores”.

**Quadro 11** – Configuração didática da OIO “Discussão entre atores” implementada

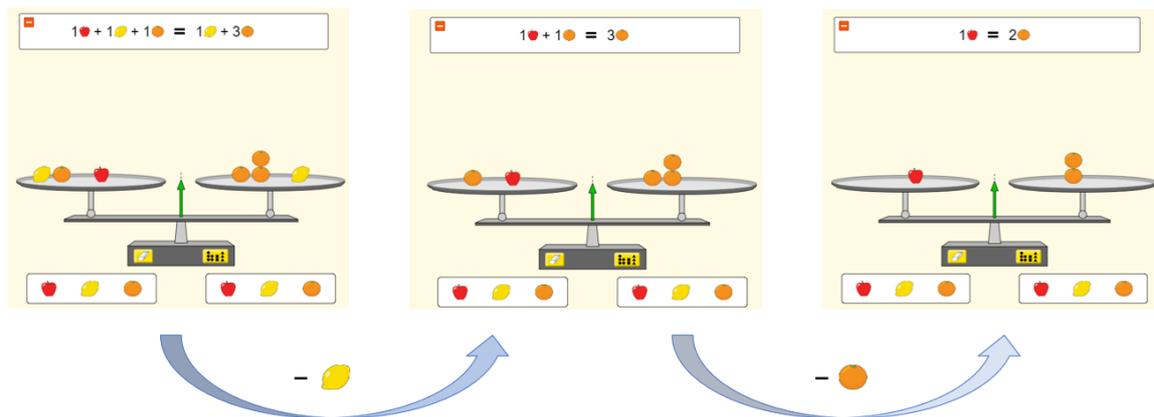
Artefatos	Papéis do estagiário, do professor e dos alunos	Ações	Tempo	Momentos
Explorador da Igualdade Básico por meio da Plataforma PhET (modos básico e lab) + Videoconferência por meio do Google Meet	<b>Alunos:</b> encontrar e propor exemplos de relações de igualdade no modo básico para discutir com a turma. <b>Estagiário:</b> mediar as discussões e fundamentar os argumentos dos alunos para a explicação do conteúdo. <b>Professor-supervisor:</b> intervir em momentos necessários, propor questionamentos e auxiliar os alunos e o estagiário.	Os alunos propõem exemplos com o EIB. Para tanto, eles descrevem passo a passo do que deve ser feito para o estagiário realizar os comandos e compartilhar a tela com a situação para todos	8 min.	1º momento
Explorador da Igualdade Básico por meio da Plataforma PhET (modo lab) + Videoconferência por meio do Google Meet	<b>Estagiário:</b> retomar o exemplo da demonstração técnica do modo lab do EIB, para discutir com a turma. <b>Alunos:</b> responder os questionamentos propostos pelo estagiário e tirar dúvidas quanto à situação em discussão. <b>Professor-supervisor:</b> intervir em momentos necessários, propor questionamentos e auxiliar os alunos e o estagiário.	O estagiário retoma um exemplo para aprofundar as discussões. Ao longo desse momento, ele questiona os alunos para gerar discussões. Os alunos interagem respondendo as questões.	8 min.	2º momento
Apresentação por meio do Google Slides + Explorador da Igualdade Básico por meio da	<b>Estagiário:</b> propor uma situação-problema para ser respondida pelos alunos com o auxílio do EIB. <b>Alunos:</b> interpretar o problema e simular no EIB para encontrar a solução. responder os	O estagiário apresenta uma situação-problema aos alunos para que eles resolvam.	20 min.	3º momento

Plataforma PhET (modo básico) + Videoconferência por meio do Google Meet	questionamentos propostos pelo estagiário e tirar dúvidas quanto à situação em discussão. <b>Professor-supervisor:</b> intervir em momentos necessários, propor questionamentos e auxiliar os alunos e o estagiário.			
--	---	--	--	--

**Fonte:** Elaborado pelos autores (2022).

No primeiro momento, a aluna Juliana disse ao estagiário que encontrou a seguinte situação: 1 maçã + 1 limão + 1 laranja = 3 laranjas + 1 limão. O estagiário ponderou que os alunos poderiam simplificar o exemplo apresentado por Juliana, perguntando a quanto uma maçã era equivalente. Juliana falou que eram duas. Breno disse que eram três. Diante disso, Breno e Juliana são indagados pelo estagiário sobre o que eles precisam fazer para verificar a resposta. Juliana disse para tirar um limão de um lado e do outro. Em seguida, repetir o mesmo processo, retirando uma laranja em ambos os lados da balança. Desse modo, chegou-se à resposta que Juliana tinha dado. Os comandos dados ao estagiário, por Juliana, indicam a compreensão da aluna da relação de igualdade em uma situação de equivalência. Tal situação é apresentada na Figura 18:

**Figura 18** – Exemplo de uma relação de igualdade apresentada por Juliana

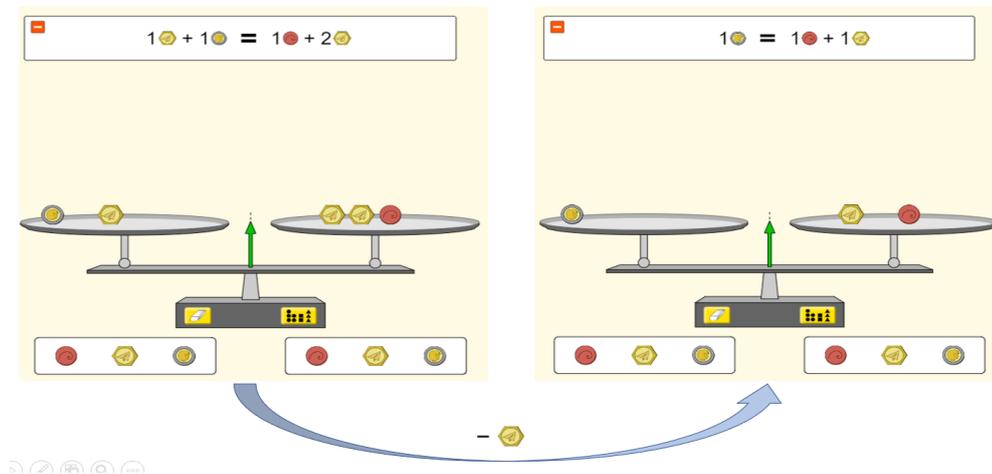


**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Um outro exemplo apresentado foi pelo aluno Tiago. Ele falou que também tinha encontrado uma relação de igualdade com as moedas. O estagiário perguntou como ele encontrou e ele disse que tinha colocado as moedas com “borda cinza” e com “aviãozinho” em cima de um dos pratos e no outro duas moedas de “aviãozinho” e uma “vermelha”. Novamente, o estagiário pontuou que os alunos poderiam simplificar o exemplo apresentado por Tiago. E,

de imediato, Juliana e Tiago responderam que era preciso apenas retirar a moeda com o “aviãozinho” em ambos os lados da balança. Desse modo, temos novamente que, quando os alunos Juliana e Tiago dizem o passo a passo do que deve ser feito pelo estagiário, há indicativos da compreensão dos alunos sobre a relação de igualdade em uma situação de equivalência.

**Figura 19** – Exemplo de uma relação de igualdade apresentada por Tiago



**Fonte:** Acervo da pesquisa.

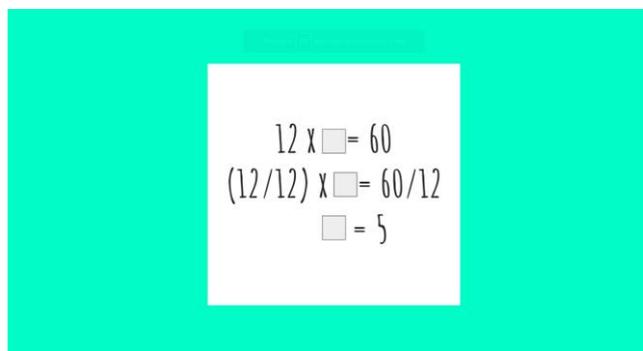
Nesses exemplos apresentados pela Juliana e pelo Tiago, em termos da praxeologia matemática, temos a realização do subtipo de tarefa  $t_1$  – *Mostrar, por meio da balança interativa, uma relação de igualdade entre quantidades equivalentes de objetos*, por meio da técnica  $\tau_1$  – *Colocar objetos (O1) em ambos os lados da balança (O2) do EBI até obter o seu equilíbrio*. Contudo, as tecnologias  $\theta_1$  – *Noção de igualdade em uma situação-problema, envolvendo equilíbrio* e  $\theta_2$  – *Interpretação do sinal de igualdade como equivalência* só são evocadas, mais adiante, pelo estagiário para explicar o conteúdo aos alunos.

Além disso, para a simplificação dos exemplos, temos a realização da tarefa  $t_4$  – *Mostrar, por meio da balança interativa, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece quando se subtrai um mesmo objeto a cada membro com a utilização da técnica  $\tau_4$  – Aplicar  $\tau_2$ . Subtrair um mesmo tipo de objeto (O1 e O4) em ambos os lados da balança (O2) para verificar seu equilíbrio e verificar a igualdade (O3) entre as sentenças de adição*.

Mediante o exemplo da Figura 19, o estagiário reforçou que em uma igualdade matemática, assim como na balança de dois pratos – quando retira uma moeda de um lado, também tem que tirar a mesma do outro –, precisa-se operar em ambos os lados para que a relação de igualdade permaneça; obtendo-se outra equivalente à anterior. Nesse sentido, foi

retomado um exemplo apresentado pelo estagiário na OIO “Orientação e explicação pelo professor”, visando ilustrar essa ideia por meio do uso do próprio slide e fazendo menção ao argumento de Juliana, para um melhor entendimento dos alunos.

**Figura 20** – Exemplo da resolução de uma relação de igualdade através do slide



$$12 \times \square = 60$$

$$(12/12) \times \square = 60/12$$

$$\square = 5$$

**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Como ilustrado na Figura 20, o estagiário explicou que no problema “ $12 \times \square = 60$ ” pode-se dividir ambos os lados por “12”, isto é, “ $(12 \times \square)/12 = 60/12$ ” e, então, obtém-se que “ $\square = 5$ ”. Nesse cenário, o estagiário explicita o trabalho do sinal de “=” em uma perspectiva relacional.

Um episódio inesperado pelo estagiário, durante a realização dessa OIO, foi que, na metade da aula, uma aluna entrou comentando no *chat* que demorou para entrar porque teve complicações ao ligar o computador. Ela perguntou qual era a página e o professor-supervisor respondeu que a atividade não era no livro. Nessa situação, é possível perceber que esse acontecimento imprevisto (reação *ad hoc* da aluna) pelo estagiário precisou da tomada de decisão didática por parte do professor-supervisor, já que o estagiário estava mediando a discussão com os outros alunos.

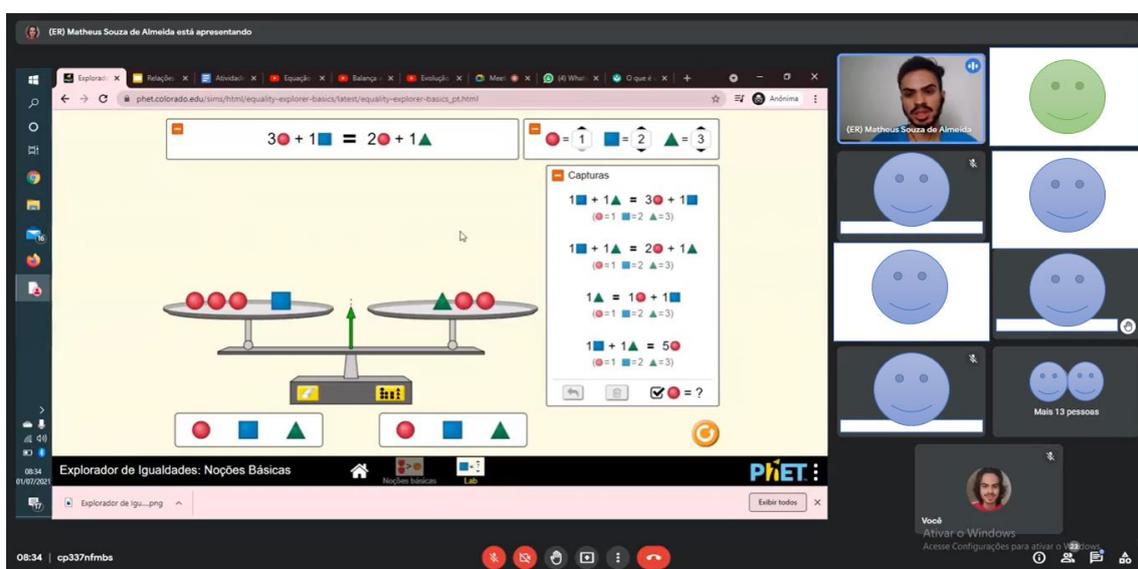
Em síntese, neste primeiro momento da OIO “Discussão entre atores”, percebemos que alguns alunos realizaram simulações individualmente em seus aparelhos eletrônicos e propuseram ao estagiário, dando comandos por intermédio do microfone, a fim de que ele realizasse as simulações e apresentasse para a turma, por meio do compartilhamento da tela no *Google Meet*. A partir dos exemplos propostos pelos alunos, o estagiário aprofundou as discussões, trazendo argumentos matemáticos (as tecnologias, nos termos da noção de praxeologia matemática) para a utilização das técnicas na resolução das tarefas.

No segundo momento, o estagiário retomou o exemplo da demonstração técnica do modo lab do EIB, para aprofundar as discussões sobre as relações de igualdade. Nesse momento, o estagiário pediu para que os alunos apresentassem relações de igualdade

equivalentes à relação de igualdade proposta inicialmente. Desse modo, os exemplos o conduziram a dar ênfase na propriedade transitiva, a fim de que os alunos pudessem partir das premissas (duas relações de igualdade iniciais), para chegar em uma conclusão (uma outra relação de igualdade equivalente).

Retomando o exemplo apresentado na OIO “Demonstração técnica” no modo lab, o estagiário buscou trabalhar outras relações de igualdades equivalentes, com objetos possuindo os mesmos valores. Breno e Juliana propuseram a segunda relação de igualdade da janela de “capturas”. Tiago propôs a terceira relação de igualdade. Todos eles dando instruções ao estagiário de como inserir os objetos na balança.

**Figura 21** – Exemplo envolvendo a propriedade transitiva da igualdade



**Fonte:** Acervo da pesquisa.

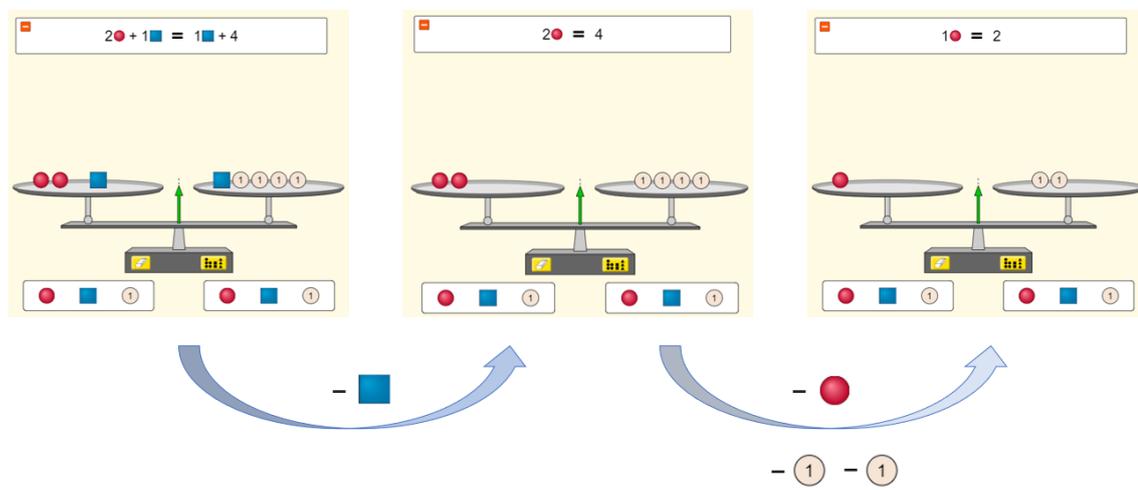
Nesse meio tempo, Maria tentou apresentar um outro exemplo no modo básico. Contudo, o estagiário pediu para concluir essa situação para depois retomar ao exemplo dado por Maria. Essa reação *ad hoc* da aluna permitiu um outro rearranjo dessa OIO, porque exigiu que o estagiário retomasse o momento da proposição de exemplos pelos alunos, previsto como o primeiro a ser realizado, ao invés de passar em seguida para o terceiro momento.

Dando continuidade ao exemplo da Figura 21, o estagiário perguntou aos alunos qual conclusão eles poderiam ter a partir da primeira e segunda igualdades na janela de “capturas”. Breno disse que era para colocar cinco bolas no lado direito da balança. Novamente, o estagiário refez a pergunta, pois Breno apresentou uma outra relação de igualdade, mas ainda não tinha chegado na propriedade transitiva. Juliana tentou responder, mas não conseguiu. O estagiário exemplifica inserindo os objetos na balança e chega na conclusão (ver Figura 21).

Ao perceber a dificuldade dos alunos em responder o problema, o estagiário retoma o exemplo de Juliana para trabalhar na propriedade transitiva. Ele explicou, por meio do microfone, que, como proposto por Juliana no início da aula, sabemos que:  $7 + 5 = 12$  e  $4 \times 3 = 12$ . Logo, é possível concluir que  $7 + 5 = 4 \times 3$ . Nesse contexto, a conexão de um aluno não ficou boa e ele pediu para o estagiário repetir. De imediato, o estagiário repetiu e o aluno disse que entendeu o exemplo.

Retomando o proposto por Maria, o estagiário pede para ela explicar o que tinha feito e ela propõe a seguinte situação: 2 bolas vermelhas + 1 cubo azul = 1 cubo azul + 4. Juliana afirma que conseguiu entender que 1 bola vermelha é igual a 2 beges. O estagiário perguntou como ela conseguiu entender isso e ela diz que retirou 1 cubo de cada lado da balança. Em seguida, ela afirmou que era preciso dividir as 4 beges por 2 e as 2 vermelhas por 2, ou seja, retirou-se metade em ambos os lados.

**Figura 22** – Exemplo de uma relação de igualdade apresentada por Maria



**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Nesse exemplo proposto pela Maria, com base na noção de praxeologia matemática, temos que a realização dessa situação, pensada por Juliana, perpassa quase todo bloco prático-técnico (ver Quadro 5) das praxeologias matemáticas identificadas no uso do EIB, principalmente a tarefa  $t_6$  – *Determinar o termo desconhecido em uma igualdade matemática envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão, por meio da balança interativa com a utilização da técnica  $\tau_6$  – Colocar apenas em um lado da balança os objetos esfera vermelha ou cubo azul (O1). Adicionar esferas com o numeral “1” em um ou dois lados da balança (O2). Subtrair a mesma quantidade em ambos os lados da balança, verificando o seu equilíbrio.*

*Dividir, por um mesmo número, os dois membros da balança para chegar ao valor do objeto da esfera vermelha ou do cubo azul (O1).*

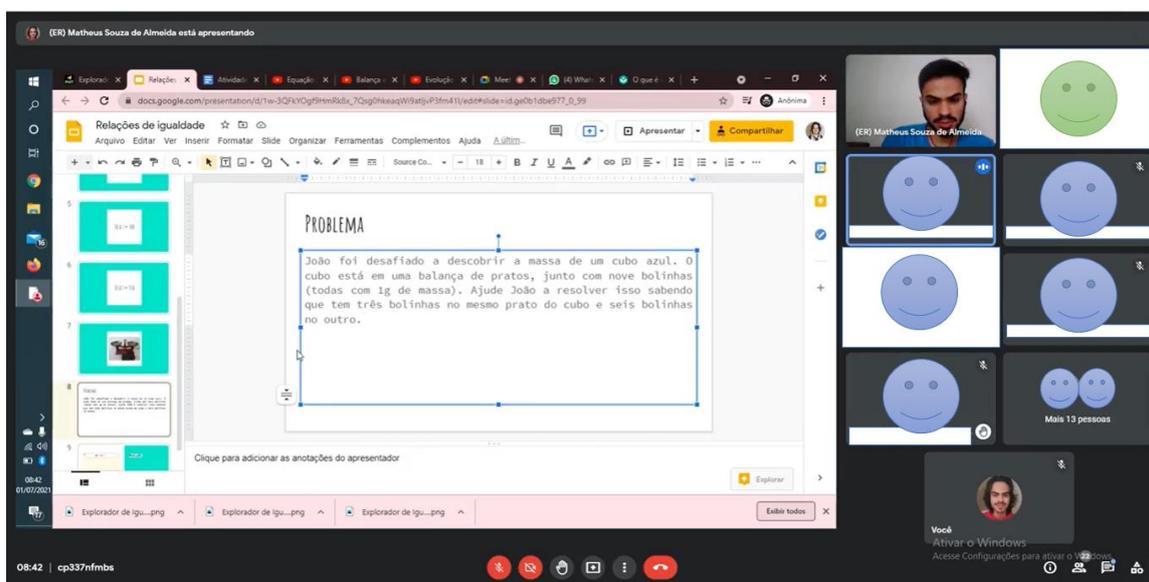
No terceiro e último momento da OIO “Discussão entre atores”, o estagiário apresentou uma situação-problema à turma, por meio dos slides, para os alunos interpretarem o problema e utilizarem o EIB, no modo básico, para respondê-lo. Devido a algumas dificuldades dos alunos em interpretar o problema, o professor interveio em uma situação pontual e trabalhou em cima dela. A seguir, descrevemos como ocorreu esse momento.

Assim como a esfera vermelha possui um valor (Figura 22), o cubo azul também. Os alunos podem descobrir esse valor por diversas possibilidades de simulações com o EIB. Mas, o estagiário propôs o seguinte para a turma:

### **PROBLEMA**

João foi desafiado a descobrir a massa de um cubo azul. O cubo está em uma balança de pratos, junto com nove bolinhas (todas com 1g de massa). Ajude João a resolver isso sabendo que tem três bolinhas no mesmo prato do cubo e seis bolinhas no outro.

**Figura 23** – Exemplo da OIO “Discussão entre atores” no 3º momento

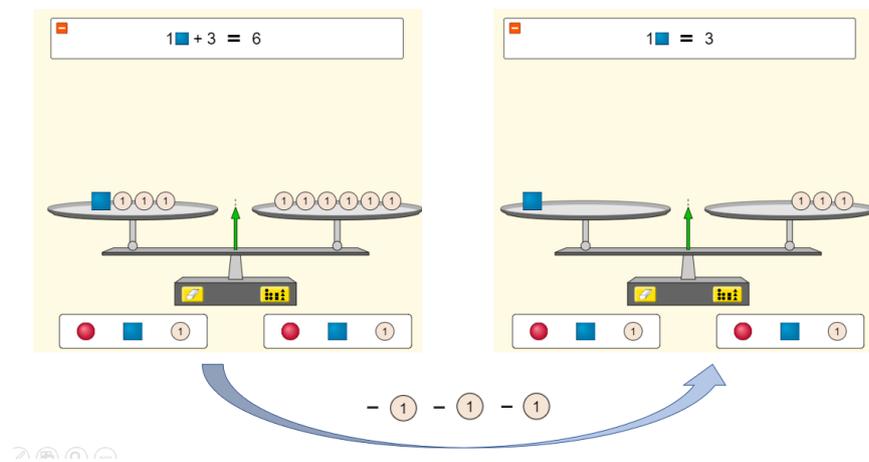


**Fonte:** Acervo da pesquisa.

O estagiário pediu para que algum dos alunos lesse o problema. Juliana e Maria se voluntariaram, mas elas decidiram que Maria iria ler. Após a leitura feita por Maria, o estagiário perguntou quais estratégias os alunos poderiam utilizar para resolver o problema. Juliana pediu um tempo para pensar. Enquanto isso, o estagiário sugeriu que os alunos poderiam utilizar o

EIB. Juliana ficou pensando e disse que iria “responder de cabeça”, pois, segundo ela, dava para responder sem o artefato digital. Depois de um tempo, ela respondeu que era para retirar três bolinhas de um lado e três bolinhas do outro. Assim, de acordo com Júlia, 1 cubo era igual a 3 gramas.

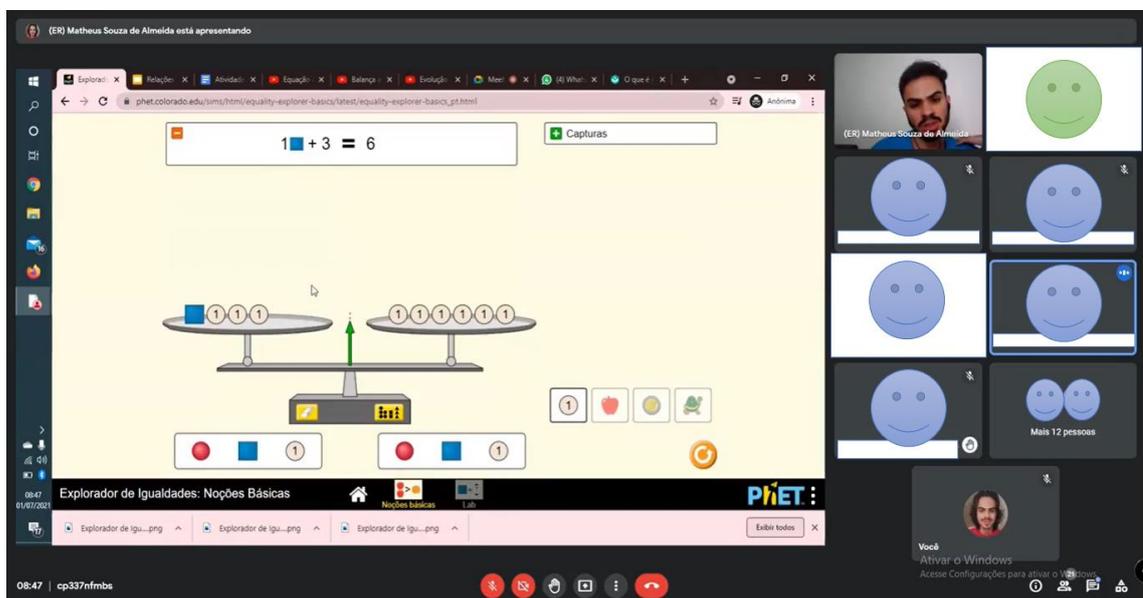
**Figura 24** – Representação da resposta de Juliana para a situação-problema



**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Para que todos pudessem visualizar a situação, o estagiário voltou para a tela do EIB e compartilhou com os alunos a seguinte situação matemática:

**Figura 25** – Situação-problema de uma relação de igualdade representada no EIB

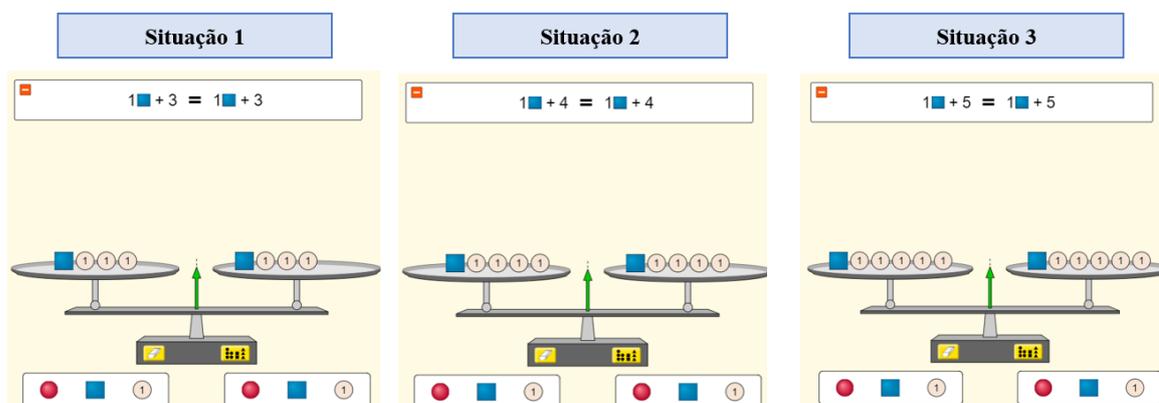


**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Logo, o estagiário buscou interpretar os dados da questão para simular com o EIB. Antes de resolver o problema com o EIB, o estagiário escolheu, aleatoriamente (olhando a lista de participantes do Google Meet), a aluna Camila e a questionou como poderia resolver a situação. A priori, ela respondeu que era 6. Então, o estagiário perguntou o que ela tinha feito para chegar na solução. Ao tentar justificar, ela disse que era 3, pois o número que somado com 3 tendo 6 como resultado é o próprio 3. Ou seja, Camila estava mobilizando a concepção do sinal de igualdade em um sentido operacional.

O estagiário explicou, novamente, a resolução em uma perspectiva relacional, mas Camila não entendeu muito bem a explicação. Na tentativa de resolver o problema, Camila pediu para retirar 3 bolas brancas do lado direito e colocar 1 cubo azul. Nesse momento, o professor fez uma intervenção na situação proposta pela Camila pedindo para que ela explicasse como ela sabe a partir da situação que ela sugeriu que um cubo tem 3 gramas. O professor sugeriu uma outra situação: se colocar 1 em cada lado, significa dizer que 1 cubo é igual a 4?

**Figura 26** – Outras situações propostas pelo professor-supervisor a partir do problema inicial



**Fonte:** Acervo da pesquisa.

Assim, o estagiário perguntou novamente a Camila quanto pesa o cubo. Camila responde que é 4. O professor pede para colocar mais uma bolinha de cada lado. E pergunta a aluna se o cubo aumentou de peso. Ela percebe e responde que não, mas sim a bolinha. O professor pede para retornar para a situação inicial e conclui o raciocínio inicial de Camila: buscar um equilíbrio entre os dois lados da balança.

Nessas situações trabalhadas com Camila a partir do problema proposto pelo estagiário, em termos da praxeologia matemática, temos a realização de todo bloco prático-técnico (ver Quadro 5) das praxeologias matemáticas identificadas no uso do EIB. Além disso, a intervenção

do professor-estagiário nesse e em outros momentos necessários, foram fundamentais para atenuar os entraves que surgiram em sala de aula.

De maneira geral, constatou-se que a implementação da composição sequenciada imediata da OIO “Orientação e explicação pelo professor”, OIO “Demonstração técnica” e OIO “Discussão entre atores” foi relevante para o desenvolvimento da habilidade (EF06MA14PE) da BNCC e do CPE, cujo objeto de conhecimento é “Propriedades da Igualdade”, com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, podemos perceber que alguns alunos conseguiram compreender a situação de equivalência subjacente às relações de igualdade trabalhadas, bem como transitar da compreensão do sinal “=” de uma perspectiva operacional para a relacional. Tais resultados suscitam que o modo de trabalho colaborativo, adotado nas orquestrações instrumentais coletivas, incitando o engajamento estudantil por meio de experimentações, é indispensável, de um ponto de vista qualitativo, para a aprendizagem dos alunos. Principalmente, levando-se em consideração os aspectos específicos da modalidade de ensino on-line, na qual os alunos estão em diferentes espaços geográficos, atravessados por suas questões familiares e pessoais. Ou seja, eles precisam ser estimulados a participarem das aulas a fim de desenvolver o pensamento matemático (nesse contexto particular, o algébrico).

Ademais, especificamente na OIO “Discussão entre atores”, na qual os alunos trabalharam com o uso do artefato Explorador da Igualdade Básico, para a proposição de situações e resolução de problemas, foi possível compreender o desenvolvimento da gênese instrumental dos alunos, por meio dos comandos dados por eles ao estagiário: “coloca tal o objeto na balança do lado esquerdo”; “coloca tal o objeto na balança do lado direito”; “ainda não está equilibrada”; “retira tal objeto em ambos os lados”, etc.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da questão de pesquisa: quais são os efeitos da implementação de orquestrações instrumentais on-line para o estudo das relações de igualdade em uma aula remota com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental? Este trabalho trilhou o objetivo de analisar o processo de concepção e implementação de orquestrações instrumentais on-line para o estudo da relação de igualdade e da noção de equivalência em uma aula remota com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

De modo amplo, podemos perceber que na implementação das OIO's, ocupamos a maior parte do tempo da aula (44 minutos) com o uso do Explorador da Igualdade Básico, que chegamos a pensar, previamente, em utilizar apenas este artefato específico para o estudo do tema Relação de Igualdade. Mas, sentimos a necessidade de integrá-lo aos outros artefatos digitais – o vídeo tratando sobre a balança de dois pratos e os slides com as questões sobre cálculo do termo desconhecido. De fato, ao integrarmos esses artefatos na introdução da aula on-line, percebemos que os alunos tinham desenvolvido, de modo geral, a relação de igualdade em uma concepção de igualdade operacional. Diante disso, justificamos a importância de ampliar a relação de igualdade para o sentido de equivalência.

A partir dos comandos dados por alguns alunos ao estagiário nas simulações interativas com o EIB, na OIO “Discussão entre atores”, identificamos indícios da gênese instrumental deles. Isso porque quando os alunos simulam em busca de exemplos de relação de igualdade, eles passam pelo processo de instrumentação, no qual as ferramentas e funções do artefato digital são exploradas pelos alunos orientados por seus conhecimentos prévios. Ademais, esses alunos passam pelo processo de instrumentalização quando compreendem os aspectos técnicos do artefato e passam a utilizá-los para propor e resolver situações-problemas com o EIB.

Dentre os limites da pesquisa, sobre a OIO “Demonstração técnica”, entendemos que essa poderia ser executada de outro modo, por exemplo: alguns alunos compartilhando a tela dos aparelhos eletrônicos deles para explicar a situação à turma, ou seja, teríamos uma OIO do tipo “Sherpa”. No entanto, como os alunos são do 6º ano do Ensino Fundamental e devido ao nosso desconhecimento do nível de familiaridade deles com o uso das tecnologias digitais – especificamente do *Google Meet* –, optamos por não convidar os alunos a compartilharem a tela; pois, caso os alunos não dominassem esse artefato digital, teríamos que explicar como compartilhar a tela, que seria incompatível com a duração da aula.

Outrossim, na OIO “Discussão entre atores”, poderíamos propor uma outra composição de OIO's – as “paralelas”, dividindo os alunos em pequenos grupos para discussões sobre as

situações. Contudo, ficaria inviável para o estagiário acompanhar o trabalho em cada grupo. Além do mais, os alunos iriam precisar voltar para o grupo geral para retomar as discussões e concluir a aula, o que requer um domínio dos artefatos digitais em jogo.

Por fim, destacamos que a pesquisa, desenvolvida no Estágio Supervisionado Obrigatório III, nos propiciou articular as práticas investigativa, reflexiva e educativa a partir de uma experiência com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Pontuamos que essa etapa de escolarização se caracteriza como uma transição entre os anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental e que carece de investigações na área, estritamente na modalidade de ensino on-line.

Como perspectivas de investigações futuras, elencamos:

- Um levantamento de outros artefatos digitais, para o ensino da relação de igualdade e a noção de equivalência, pode ser feito.
- Diante do contexto atual de retomada do ensino on-line para o presencial, pensamos que é possível desenvolvermos outras investigações sobre as orquestrações instrumentais em aulas com o uso de artefatos digitais para o ensino de álgebra escolar.
- Na formação inicial docente, outros licenciandos em matemática e pedagogia podem ser investigados quanto ao desenvolvimento de OI's para o estudo de relação de igualdade.
- Devido às demandas curriculares atuais, pode-se propor pesquisas no âmbito da formação inicial e continuada de professores dos anos iniciais e/ou finais do Ensino Fundamental para o desenvolvimento de conhecimentos didáticos acerca da álgebra escolar, em particular, do tema relação de igualdade.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M.; COSTA, P. R. B.; MELLO, T. L.; DAMASCENA, J. S. Banco geométrico: gênese documental e orquestração instrumental. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 15, n. 1, p. 1-22, 2020. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2020.e71545>>. Acesso em: 22 jan. 2022.
- ALMEIDA, M. S.; OLIVEIRA, M. E. N.; ESPÍNDOLA, E. B. M. Explorador Básico de Igualdade da plataforma digital PhET: uma análise acerca das potencialidades didáticas à luz da BNCC e do currículo de Pernambuco. **BOCEHM – Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 23, p. 829–845, 2021. Disponível em: <<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5001>>. Acesso em: 6 maio. 2022.
- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.
- BELLEMAIN, F.; TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 9, n. 1, 2019. Disponível em: <[https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos\\_da\\_educacao\\_matematica/article/view/300](https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/300)>. Acesso em: 22 jan. 2022.
- BOSCH, M. CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’étude et problématique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensé Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/CNE, 2018. Disponível em: <[http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC\\_EI\\_EF\\_110518\\_versaofinal\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf)>. Acesso em: 06 dez. 2021.
- CAVALCANTI, J. D. B. **Concepções de alunos do 3º ano do ensino médio sobre o significado do símbolo "=" em contextos aritméticos e algébricos**. 2008. 159 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Disponível em: <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/handle/tede2/5903>>. Acesso em: 02 fev. 2022.
- CAVALCANTI, J. D.; SANTOS, M. C. Significado do símbolo de igual “=” no contexto das funções e as concepções dos alunos. In: LIMA, A. P.A.B. et al. (Org.). **Pesquisas em fenômenos didáticos: alguns cenários**. Recife: Editora da UFRPE, 2010.
- CHEVALLARD, Y. **A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática**. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (Orgs.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1ª ed. Curitiba, PR: CVR, 2018, p. 31-50.
- CIANI, A. B.; OLIVEIRA, E.; NASCIMENTO, J.; ROSA, M. O sinal de igual e sua utilização em sentenças matemáticas. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIV., 2017, Cascavel, **Anais eletrônicos...**, Cascavel, 2017. Disponível em:

<[http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV\\_EPREM/paper/viewFile/212/138](http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/212/138)>. Acesso em 20 mar. 2021.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Orgs.) **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015 (Coleção Insubordinação Criativa).

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVMEIJER, K. The Teacher and the Tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin Heidelberg, v. 75, n. 2, p. 213-234, Springer Netherlands, 2010. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-010-9254-5>>. Acesso em: 08 jun. 2021.

DRIJVERS, P.; TROUCHE, L. From artifacts to instruments: a theoretical framework behind the orchestra metaphor. In: BLUME, G. W.; HEID, M. K. (Eds.). **Research on technology and the teaching and learning of mathematics: cases and perspectives**. Charlotte, NC: Information Age, v. 2, p. 363-392, 2008.

FEITOSA, F. E. S.; RODRIGUES, R. S. Aprendizagem cooperativa baseada em problemas e orquestração instrumental no ensino de cálculo. **REAMEC – Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 9, n. 1, p. e21030-e21030, 2021. Disponível em: <<https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/11798>>. Acesso em: 04 mai. 2022.

FEITOSA, F. E. S.; VALENTE, A. A. P. Laboratório de Ensino de Matemática no âmbito do PARFOR: um olhar à luz da Orquestração Instrumental. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 7, p. 75078-75099, 2021. Disponível em: <<https://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/33617>>. Acesso em: 04 mai. 2022.

FEITOSA, F. E. S. Orquestração Instrumental e Engenharia Didática: um contributo para o ensino de funções reais de uma variável real. **Educitec – Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 8, n. jan./dez., p. e174422-e174422, 2022. Disponível em: <<https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/1744>>. Acesso em: 04 mai. 2022.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 62<sup>a</sup> ed. – Rio de Janeiro / São Paulo: Paz e Terra, 2019.

GITIRANA, V.; LUCENA, R. Orquestração instrumental on-line: um modelo pensado a partir do ensino remoto. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, n. 3, p. 362-398, 2021. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/56700>>. Acesso em: 1 fev. 2022.

GOMES, L.; NORONHA, C. A. Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: orientações e práticas de ensino e aprendizagem. **Revista Educação e Infâncias**, v. 1, n. 1, 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ufrn.br/educacaoinfancia/article/view/21048>>. Acesso em: 08 fev. 2022.

IGNÁCIO, R. S. **Criação de capítulo de livro didático digital no estágio curricular supervisionado: uma análise da documentação na formação inicial do professor de matemática**. 2018. 171 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade

Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em:  
<<https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/21819>>. Acesso em: 08 set. 2021.

KIERAN, C. Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER, F. K. Jr. (Ed.). **Second Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Greenwich: Information Age Publishing, 2007, p. 707-762.

LUCENA, R. **Mediações didáticas da tutoria online da geometria analítica**: Uma análise à luz da orquestração instrumental e das representações semióticas. 2015. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco/UFPE, Recife, 2015. Disponível em:  
<<https://attena.ufpe.br/handle/123456789/18808>>. Acesso em: 08 jun. 2021.

LUCENA, R. **Metaorquestração Instrumental**: um modelo para repensar a formação de professores de matemática. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática). 383p. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em:  
<<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32844>>. Acesso em: 08 set. 2021.

LUCENA, R.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. Teoria da Orquestração Instrumental: um olhar para a formação docente. In: SIMPÓSIO LATINOAMERICANO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA, I, Bonito, 2016. **Anais eletrônicos...** Bonito, 2016. Disponível em:  
<<http://grupoddm.pro.br/wp-content/uploads/2020/05/LUCENA-GITIRANA-TROUCHE.pdf>>. Acesso em: 08 set. 2021.

LUCENA, R. M. L. S.; GITIRANA, V.; TROUCHE, L. O ENSINO DE MATEMÁTICA COM INTEGRAÇÃO DE RECURSOS DIGITAIS: um olhar sobre aulas à luz da Orquestração Instrumental. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 5, n. 3, p. 238–261, 2019. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/40926>>. Acesso em: 24 mar. 2022.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Métodos de Coleta de dados: observação, entrevista, e análise documental. In: LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: Epu, 1986. Cap. 3. p. 25-44. Disponível em:  
<[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4091392/mod\\_resource/content/1/Lud\\_And\\_cap3.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4091392/mod_resource/content/1/Lud_And_cap3.pdf)>. Acesso em: 15 set. 2021.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO. **Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année**. Modélisation et algèbre. Fascicule 2. Situations d'égalité. Ontario: Ministère de l'Éducation, 2003. Disponível em:  
<[http://atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE\\_math\\_MA\\_M\\_3\\_fasc2.pdf](http://atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_MA_M_3_fasc2.pdf)>. Acesso em 01 jun. 2022.

MIRANDA, D. R. **Significados do sinal de igualdade na Matemática**. 2019. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: <<https://www.bdt.uerj.br:8443/handle/1/4840>>. Acesso em: 08 fev. 2022

MOREIRA, J. A.; HENRIQUES, S.; BARROS, D. M. V. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. **Dialogia**, p. 351-364, 2020. Disponível em: <<https://repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/9756>>. Acesso em: 08 jan. 2022.

MUNIZ, Marcelo; GITIRANA, Verônica; LUCENA, Rosilângela. Orquestração instrumental on-line para a aprendizagem de função no contexto de ensino remoto. In: CONGRESSO SOBRE TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO (CTRL+E), 2021, Evento Online. **Anais [...]**. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2021. p. 81-89. Disponível em: <<https://sol.sbc.org.br/index.php/ctrl/article/view/17552>>. Acesso em: 08 jan. 2022.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Princípios e normas para a Matemática escolar**. Lisboa: APM, 2007.

OLIVEIRA, M. E. N.; ALMEIDA, M. S.; ESPÍNDOLA, E. B. M. Praxeologias Matemáticas: relações de igualdade e princípios de equivalência a partir do explorador básico de igualdade da plataforma digital PhET. Encontro Gaúcho de Educação Matemática. **Anais...** Disponível em: <https://wp.ufpel.edu.br/egem2021/files/2021/07/092.pdf>. Acesso em: 06 mai. 2022.

PERNAMBUCO. **Currículo de Pernambuco**. Ensino Fundamental. Área de Matemática. Recife: Secretaria de Educação. 2019. Disponível em: <[http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica\(2\).pdf](http://www.educacao.pe.gov.br/portal/upload/galeria/19487/Matem%C3%A1tica(2).pdf)>. Acesso em: 06 dez. 2021.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Paris, Armand Colin, 1995. Disponível em: <<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document>>. Acesso em: 08 mar. 2022.

ROUSSON, L. **Conception d'un jeu-situation numérique et son appropriation par des professeurs: le cas de l'enseignement de l'énumération à l'école maternelle**. 2017, 751f. Thèse (Doctorat en Sciences de l'Éducation), l'Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, 2017. Disponível: <<https://hal.univ-lille.fr/DIDACTIQUE/tel-01730704v1>>. Acesso em: 08 mar. 2022.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015. Disponível em: <<https://desafioonline.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1456>>. Acesso em: 08 fev. 2022.

SILVA, L. G. V. **Orquestração instrumental com o GEOGEBRA: uma abordagem de função afim**. 2021. 67f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2021a. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/43642>>. Acesso em: 13 mai. 2022.

SILVA, T.; RIBEIRO, A. O sinal de igualdade e seus diferentes significados: buscando rupturas na transição entre os Ensinos Fundamental I e II. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 5, n. 2, p. 75-90, 1 jul. 2014. Disponível em: <<https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/999>>. Acesso em: 08 fev. 2022.

SILVA, T. T. X. **Aprendizagem no ensino remoto**: a gênese instrumental de licenciandos com o GeoGebra em dispositivos móveis. 2021. 67f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2021b. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/42696>>. Acesso em: 13 mai. 2022.

TEIXEIRA, P. C.; MATOS, J. M. L. DOMINGOS, A. A orquestração instrumental dos recursos tecnológicos no ensino da matemática. **Recursos na Educação Matemática**, p. 291-302, 2016. Disponível em: <<https://run.unl.pt/handle/10362/21301>>. Acesso em: 21 nov. 2021.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática [online]. 2015, v. 29, n. 51. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/bolema/a/GqBLw5M9bHhx7KqrdQMv84h/?lang=pt&format=html>>. Acesso em: 08 fev. 2022.

TROUCHE, L. Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 55, n. 1, p. 181-197, 2004a. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1023/B:EDUC.0000017674.82796.62>>. Acesso em: 21 set. 2021.

TROUCHE, L. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. **International Journal of Computers for mathematical learning**, v. 9, n. 3, p. 281-307, 2004b. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10758-004-3468-5>>. Acesso em: 21 set. 2021.

PONTE, J. P.; M. L.; BRANCO, N.; MATOS, A. **A Álgebra no ensino básico**. Portugal: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular – DGIDC, Lisboa, 2009. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/7105>>. Acesso em: 09 fev. 2022.