

**ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS UTILIZANDO O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
DYNAMIC ANALYSIS OF TRUSS STRUCTURES USING THE FINITE ELEMENT  
METHOD.**

Lenilson Régio Ferreira<sup>1</sup>

Paulo Marcelo Vieira Ribeiro<sup>2</sup>

**RESUMO**

Percebe-se que atualmente vem havendo um aumento significativo em relação a criação de código fonte e/ou programas computacionais para fins de dimensionamento de estruturas, e variadas são as linguagens que são utilizadas para tais criações, dessa forma, nesse trabalho foi desenvolvido um código fonte na linguagem matlab, onde o principal objetivo do mesmo visou a construção de um código com base nos Métodos dos Elementos Finitos – MEF, onde podemos resolver problemas dinâmicos de estruturas treliçadas com esforços pontuais aplicados nos nós, de modo que foi obtido informações estáticas (deslocamento) e dinâmicas (frequências naturais e modos de vibração) da estrutura, e em paralelo foi realizado uma comparação desses resultados obtidos com um programa já renomado no mercado, que no caso foi o SAP2000, onde o mesmo visa facilitar o entendimento da aplicação desse método aos alunos e Engenheiros recém formados, com intuito de diminuir os erros de cálculos relacionados a análises estruturais. Os resultados obtidos da comparação foram bem próximos, com pouquíssima diferença entre os valores. No caso dos deslocamentos nodais da análise estática, os resultados foram exatamente iguais. Já as frequências naturais e os modos de vibração deram uma diferença a qual é praticamente desprezível. De um modo geral, pôde-se validar a formulação desenvolvida nesse trabalho, uma vez que ambos os caminhos deram que os resultados convergem para o mesmo ponto.

Palavras-chave: elementos finitos; análise dinâmica; frequências naturais; modos de vibração.

**ABSTRACT**

It is noticed that currently there has been a significant increase in relation to the creation of source codes and/or computer programs for structural design purposes, and several are the languages that are used for such creations, in this work a source code was developed in the Matlab language, where the main objective of it aimed to build a code based on the Finite Element Methods - FEM, where we can solve dynamic problems of truss structures with point efforts applied to nodes, so that static (displacement) and dynamic (natural frequencies and vibration modes) information of the structure was obtained, and in parallel a comparison of these results was performed with a program already renowned in the market, which in this case was SAP2000, where it aims to facilitate the understanding of the application of this method to students and newly graduated engineers, in order to reduce errors in calculations related to structural analysis. The results obtained from the comparison were very close, with very little difference between the values. In the case of static analysis nodal displacements, the results were exactly the same. The natural frequencies and vibration modes, on the other hand, gave a

---

<sup>1</sup> Bacharelado em Engenharia Civil pela Universidade Federal Rural de Pernambuco - Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, 2021.

<sup>2</sup> Doutor em Estruturas e Construção Civil pela Universidade de Brasília, Brasília, 2010 – UnB.

difference that is practically negligible. In general, it was possible to validate the formulation developed in this work, since both paths gave results converging to the same point.

Keywords: finite elements; dynamic analysis; natural frequencies; vibration modes.

## INTRODUÇÃO

O termo Método dos Elementos Finitos, conhecido também com MEF, teve início há muitos anos, mais especificamente a 2000 anos a.c, quando os matemáticos começaram os estudos para saber o perímetro dos círculos. Nesse estudo eles tentavam simular o círculo com polígonos com diversos lados, dessa forma eles poderiam fazer uma aproximação do perímetro dos círculos. Esse procedimento já podemos afirmar que seria elementos finitos, uma vez que eles dividiam um objeto contínuo em diversos elementos, porém de quantidades finitas, quantidades essas que eram suficientes para resolverem os problemas. Sabe-se hoje que o MEF já era usado empiricamente para resolução de alguns problemas, no entanto, segundo (AZEVEDO, 2003, p.1) a formulação do método se deu a partir de equações matemáticas, onde foi designado com os estudos voltados para pontes, edifícios, barragens, etc. Atualmente, existem diversos software com base em MEF que permite a realização de projetos estruturais na Engenharia Civil, esses softwares permitem que trabalharemos com projetos bem mais complexo e sofisticados, requerendo apenas dos projetistas a modelagem correta da estrutura, introdução inicial dos dados e interpretação dos resultados obtidos pelo programa. Ainda segundo (AZEVEDO, 2003, p.iii):

Na ausência de uma comparação dos resultados provenientes do MEF com os oriundos de outros modelos, existe o sério risco de a segurança de uma estrutura ser justificada com base em cálculos completamente inadequados. Este facto tem sido confirmado pelo elevado número de acidentes em estruturas acabadas de construir, bem como pela quantidade de reparações que tem sido

necessário efetuar em construções recentes. A transmissão aos alunos dos fundamentos de MEF, e também de uma introdução à correspondente programação em computador, constituem certamente fatores que conduzirão os futuros projetistas a uma utilização mais segura dos softwares de análise de estruturas.

Partindo dessa reflexão a respeito do porquê devemos entender o que está por trás desse modelo, foi desenvolvido nesse trabalho um código em MEF onde realizamos uma análise dinâmica com problemas que envolvem estruturas treliçadas, além de fazermos uma comparação com software SAP2000.

### Justificativa do tema

Sabe-se que atualmente as treliças tridimensionais são vastamente utilizadas no meio da construção civil, principalmente quando se trata de estruturas metálicas ou de madeiras, como podemos verificar nas Figuras 1-a e 1-b.

Figura 1 – (a): Cobertura metálica em estrutura de madeira



Fonte: (Manutenção e Suprimentos (2021))

Figura 1 – (b): Cobertura metálica em estrutura de madeira



Fonte: Araújo (2021)

No entanto, segundo (AZEVEDO, 2003) atualmente, existem o grande problema de que a segurança de uma estrutura deve ser calculada com base em cálculos completamente errados e/ou inadequados e isso vem se confirmando pelos grandes números de acidentes estruturais e grandes necessidade de reparações nas estruturas. O que podemos concluir disto é que mesmo com uma grande quantidade de softwares para dimensionamento estrutural, infelizmente os engenheiros ainda causam muitos erros de cálculo estrutural, e isso não seria diferente para as análises de estruturas treliçadas. Logo, este trabalho busca tentar de alguma forma aplicar alguns conceitos de forma mais didática possível com o intuito de repassar o máximo dessa teoria aos futuros discentes de engenharia e com isso estar contribuindo para a diminuição dessas defasagens nos cálculos estruturais cometidos por muitos dos profissionais de engenharia.

### Hipóteses da pesquisa

- Os deslocamentos devidos as ações das cargas externas são muito pequenas se comparado com o tamanho dos elementos da estrutura, dessa forma pode-se considerar que a geometria da estrutura não se deforma e, portanto, trabalharemos na hipótese da análise linear;
- Também foi considerado a hipótese de que a treliça estará totalmente rotulada;

- Para facilitar na análise dinâmica, foi considerado que o sistema é forçado e não amortecido, ou seja, desconsidera-se a parcela de amortização do sistema.

### METODOLOGIA

O presente estudo pode ser dividido em basicamente duas etapas, as quais são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho.

A primeira etapa é a parte de formulação matricial do código em elementos finitos, de modo que para o qual iremos utilizar a plataforma do SAP2000. Onde temos que o conceito básico é a montagem da matriz de rigidez e de massa da estrutura (esse procedimento pega como base as localizações nodais referente a cada barra da estrutura), pela geometria dos elementos tais como: área da seção transversal e comprimento de barra, além das propriedades físicas, a quais incluem: módulo de elasticidade, densidade do material. Tendo em mãos todas essas informações pode-se começar a montar a matriz de rigidez global e de massa, a qual é uma peça do código indispensável para extrairmos todas as informações necessária à análise estrutural da estrutura como um todo. O passo a passo para chegar a essas matrizes serão descritas na próxima seção, na qual iremos definir matematicamente toda a formulação do método dos elementos finitos para uma análise dinâmica linear referente a estruturas treliçadas. Uma vez formulada a matriz global de rigidez e de massa, utilizamos as condições de contorno para obter os resultados de deslocamentos dos nós, modos e frequência natural de vibração, os quais irão desempenhar um papel importantíssimo para nossa análise dos resultados. Toda a formulação do código foi realizada via plataforma MATLAB, na qual fornecemos os dados de entrada da estrutura analisada e temos como retorno os parâmetros de análise descritos acima.

A segunda etapa do processo constitui-se da análise dos resultados extraídos do código formulado no MATLAB, bem como fazer uma breve comparação dos resultados com os obtidos da modelagem em SAP2000, de tal maneira que serão tiradas algumas conclusões, as quais serão redigidas no tópico de resultados e discussão.

A seção Metodologia deve conter informações acerca das etapas experimentais/metodologia realizadas, como por exemplo preparação das amostras, forma de coleta dos dados, técnicas e equipamentos utilizados na caracterização, dentre outras informações que os autores julguem importantes.

## FORMULAÇÃO MATEMÁTICA EM ELEMENTOS FINITOS

Os procedimentos iniciais são análogos aos procedimentos executados na análise estática, basicamente faz-se o mesmo processo e logo após impõe-se que a barra está sob ação de uma força que varia com o tempo. Considere a uma barra com um carregamento em suas extremidades dependente do tempo, conforme mostra a Figura 03.

Figura 03: Barra submetida a um



carregamento que depende do tempo.

Fonte: Logan (2000)

### 1ºPasso: Definir a função de deslocamento nodais da barra

A função a qual rege o deslocamentos da barra devido a aplicação das forças  $f^e(t)$  e  $f^e(t)$  é dada por:

$$u = c_1 + c_2x \quad \text{Eq. (1)}$$

De modo que ambos os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  dependem estritamente de  $u_1$ ,  $u_2$  e do comprimento  $L$ , logo temos que:

$$u = u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)x \quad \text{Eq. (2)}$$

Em forma matricial, podemos escrever da seguinte forma:

$$u = \left(1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(3)}$$

Chamando  $N_1 = 1 - \frac{x}{L}$  e  $N_2 = \frac{x}{L}$ , temos então que:

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.(4)}$$

De modo que  $[N] = [N_1 \quad N_2]$  e  $\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

### 2ºPasso: Relação de tensão e deslocamento

Como sabemos, o deslocamento de uma peça é dado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [B]\{d\}, \quad \text{Eq. (5)}$$

Na qual a matriz  $[B]$  é a derivada da matriz formada pelas funções  $N_1$  e  $N_2$ , ou seja, as matrizes  $[B]$  e  $\{d\}$  são respectivamente iguais a:

$$B = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right] \text{ e } \{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{Eq. (6)}$$

Da mesma forma, a tensão no material pode ser encontrada usando a fórmula:

$$\sigma_x = [K]\{\varepsilon_x\} \quad \text{Eq. (7)}$$

Substituindo a Eq.(5) em Eq. (7), temos que:

$$\sigma_x = [K][B]\{d\} \quad \text{Eq.(8)}$$

### 3ºPasso: Derivando os elementos das matrizes de massa e de rigidez

Como as forças  $f_{1,x}^e(t)$  e  $f_{2,x}^e(t)$  são dependentes do tempo, dificilmente a barra está em equilíbrio, pois elas estão variando a cada segundo que passa de forma distintas, logo  $f_{1,x}^e(t) \neq f_{2,x}^e(t)$ . Sabemos também que uma vez que a barra da Figura 3 está sob a influência de uma força externa, automaticamente aparece uma força interna para combater, de modo que a resultante desse sistema, pela segunda lei de Newton, é igual a massa da barra vezes a aceleração. Sabendo que a aceleração é dada derivando o deslocamento da barra duas vezes, temos:

$$\begin{aligned} f_{1,x}^e(t) - f_{1,x}(t) &= m_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad f_{2,x}^e(t) - \\ f_{2,x}(t) &= m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \text{Eq.(9)}$$

Onde  $m_1$  e  $m_2$  são obtidos fazendo a média das massas da barra igualmente para os dois nós, portanto:

$$m_1 = m_2 = \frac{\rho A l}{2} \quad \text{Eq.(10)}$$

Reescrevendo a Eq.(9) em forma matricial, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} f_{1,x}^e \\ f_{2,x}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1,x} \\ f_{2,x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \end{Bmatrix}$$

, Eq.(11)

Da análise estática, temos que:

$$\begin{Bmatrix} f_{1,x} \\ f_{2,x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eq. (12)}$$

Onde  $[k] = \frac{AE}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Da Eq.(11), temos que a matriz de massa é definida por:

$$[m] = \frac{\rho A l}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (13)}$$

onde esta é dita matriz de massa concentrada, do inglês denomina-se lumped-mass matrix.

Ainda observando a Eq.(11), temos que a matriz de aceleração é dada por:

$$\{d\} = \frac{\partial^2 \{d\}}{\partial t^2} \quad \text{Eq. (14)}$$

Das Eqs. (11), (12), (13) e (14), temos que:

$$\{f^e(t)\} = [k]\{d\} + [m]\{\ddot{d}\} \quad \text{Eq.(15)}$$

A Eq.(13) é a matriz de massa concentrada, observe que ela é uma matriz diagonal, ou seja, existem valores apenas nas diagonais, sendo o restante dos termos iguais a zero. Isso tem um lado bom e outro ruim, o bom é que facilita e muito na hora da montagem das equações globais, o lado negativo é que não tem tanta precisão quanto a matriz de massa consistente. Dessa forma iremos desenvolver a matriz de massa consistente para que nossos resultados sejam ainda mais precisos.

De acordo com Logan (2000, p. 768), para desenvolver a matriz de massa consistente, normalmente faz-se uso do método dos princípios dos trabalhos virtuais ou simplesmente PTV. Entretanto, o princípio de D'Alembert facilita ainda mais nosso trabalho.

Para isso, iremos aplicar uma força efetiva de bordo, que de acordo com o princípio de D'Alembert pode ser definida como sendo:

$$\{X^e\} = -\rho\{\ddot{u}\} \quad \text{Eq. (16)}$$

Ainda segundo Logan (2000, p. 768), as forças associadas à matriz  $\{X^e\}$  podem ser encontradas utilizando a seguinte integral:

$$\{f_b\} = \iiint_V [N]^T \{X\} dV \quad \text{Eq.(17)}$$

Agora fazendo a substituição da Eq. (16) na Eq. (17), obtemos que:

$$\{f_b\} = -\iiint_V [N]^T \rho\{\ddot{u}\} dV \quad \text{Eq.(18)}$$

Da Eq. (4) temos que  $u = [N]\{d\}$ , derivando duas vezes obtemos respectivamente:

$$\{\dot{u}\} = [N]\{\dot{d}\} \quad e \quad \{\ddot{u}\} = [N]\{\ddot{d}\} \quad \text{Eq. (19)}$$

Substituindo a Eq. (19) em Eq. (18), obtemos:

$$\begin{aligned} \{f_b\} &= - \iiint_V [N]^T [N] \{\ddot{d}\} \rho \, dV = \\ &- \iiint_V [N]^T [N] \rho \, dV \end{aligned} \quad \text{Eq. (20)}$$

Definindo a matriz de massa do elemento como sendo:

$$- \iiint_V [N]^T [N] \rho \, dV = [m] \quad \text{Eq. (21)}$$

Assim sendo, temos que:

$$\{f_b\} = -[m]\{\ddot{d}\} \quad \text{Eq. (22)}$$

A matriz definida na Eq. (21) é denominada de matriz de massa consistente do elemento ou do inglês: consistent-mass matrix. Observe-se que a mesma função de forma  $[N]$  utilizada para encontrar a matriz de rigidez do elemento no caso estático, também é usada para obter a matriz de massa consistente do elemento para o caso dinâmico. Dessa forma, assim como na geração da matriz de rigidez, podemos substituir as funções de forma para cada elemento e construir a matriz de massa consistente global.

Vamos agora encontrar a matriz de massa consistente do elemento de barra da Figura 3. Uma vez que temos que as funções de forma para esse elemento de barra são dadas na Eq. (4).

Da Eq. (21) temos:

$$\begin{aligned} [m] &= \iiint_V \rho \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right]^T \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right] dV \\ &= \iiint_V \rho \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dV \end{aligned}$$

Fazendo a substituição do elemento de volume por elemento de área, ou seja,  $dV$

$= dA dx$ , temos que:

$$[m] = \iiint_V \rho \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dA dx$$

Eq. (23)

Sabendo que  $A = \iint dA$ , prosseguimos que:

$$[m] = \rho A \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx$$

Eq. (24)

Fazendo a multiplicação das matrizes, jogando a integral para dentro da matriz, temos que:

$$[m] = \rho A \begin{vmatrix} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx & \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right) dx \\ \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right) dx & \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{vmatrix}$$

Eq. (25)

Resolvendo cada integração, temos:

$$[m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (26)}$$

De modo que a matriz  $[m]$  é chamada matriz de massa consistente para um elemento de barra no plano. O próximo passo é encontrar as matrizes de rigidez e de massa global de uma estrutura.

#### 4º Passo: Mudança de coordenadas e Matrizes globais

Lembrando que as Eqs. (12) e (26) valem para o sistema de coordenadas locais do elemento de barra, como o intuito é facilitar ao máximo nosso trabalho, faz-se necessária a transformação de coordenadas locais para globais. Para isso temos a seguinte matriz de transformação de coordenadas.

$$T = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (27)}$$

Onde

$$C_x = \frac{x_f - x_i}{L} \quad \text{Eq. (28)}$$

$$C_y = \frac{y_f - y_i}{L} \quad \text{Eq. (29)}$$

$$C_z = \frac{z_f - z_i}{L} \quad \text{Eq. (30)}$$

Lembrando que o comprimento  $L$  da barra é dado por:

$$L = \sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2 + (z_f - z_i)^2} \quad \text{Eq. (31)}$$

Portando, a obtenção da matriz de rigidez do elemento de barra em coordenadas globais para o sistema espacial fica da seguinte forma:

$$K_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z & -C_y C_x & -C_y^2 & -C_y C_z \\ C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 & -C_z C_x & -C_z C_y & -C_z^2 \\ C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ -C_y C_x & C_y^2 & -C_y C_z & C_y C_x & C_y^2 & C_y C_z \\ -C_z C_x & -C_z C_y & -C_z^2 & C_z C_x & C_z C_y & C_z^2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (32)}$$

Segundo Paz (2018, p. 362), não se faz necessário aplicar a matriz de transformação para encontrar a matriz de massa do elemento, uma vez aplicada, a matriz permanece inalterada, dessa forma, a matriz de massa concentrada e consistente do elemento espacial são respectivamente:

$$M_{e,c} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (33)}$$

E,

$$M_{e,c} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. (34)}$$

### 5º Passo: Montagem das matrizes de rigidez e de massa pelo método da rigidez direta

Para isso, adotamos o método de rigidez direta, o qual faz-se o somatório das matrizes de cada elemento separadamente, formando uma matriz global da estrutura a qual irá ser modelada.

Segundo Logan (2000, p. 777), para análise dinâmica, adota-se que os elementos de

aceleração são contínuos, de forma que as equações globais são dadas por:

$$\{F^e(t)\} = [K]\{d\} + [M]\{\ddot{d}\} \quad \text{Eq. (35)}$$

De forma que as matrizes  $\{F^e(t)\}$ ,  $[K]$  e  $[M]$  são respectivamente:

$$F^e(t) = \sum_{e=1}^N f^e(t), \quad K^e(t) = \sum_{e=1}^N k^e \quad e \\ M^e(t) = \sum_{e=1}^N M^e(t) \quad \text{Eq. (36)}$$

### 5º Passo: Frequências naturais

Vamos agora entender o procedimento de como encontrar as frequências naturais para um elemento de barra. Segundo Logan (2000, p.782), as frequências naturais são extremamente necessárias para uma correta análise de vibração, sendo também indispensável para escolher o intervalo de tempo necessário para realizar a análise dinâmica.

Para a determinação das frequências naturais, pegamos a Eq. (35) e adotamos como zero a matriz de força  $F^e(t)$ , ou seja, adotamos que a estrutura não esteja sob a presença de qualquer tipo de carregamento, dessa forma, temos que:

$$[K]\{d\} + [M]\{\ddot{d}\} = 0 \quad \text{Eq. (37)}$$

De modo que para esse tipo de sistema, a solução adotada como padrão é do tipo:

$$\{d(t)\} = \{d'\}e^{i\omega t} \quad \text{Eq. (38)}$$

Onde  $\{d'\}$  é parte da matriz de deslocamento nodal e não depende do tempo, também chamado de modos naturais da barra e/ou de uma estrutura. Vale ressaltar que  $i$  é o número complexo e  $\omega$  é a frequência natural da barra ou estrutura analisada.

Derivando a Eq. (37) duas vezes seguidas, chegamos que:

$$\{\{\ddot{d}(t)\}\} = \{d'\}(-\omega^2)e^{i\omega t} \quad \text{Eq. (39)}$$

Substituindo as Eqs. (38) e (39) na Eq. (37), obtemos o seguinte:

$$[K]\{d'\}e^{i\omega t} + [M]\{d'\}(-\omega^2)e^{i\omega t} = 0 \quad \text{Eq. (40)}$$

Reorganizando a Eq. (38), obtemos:

$$e^{i\omega t}([K] - \omega^2[M])\{d'\} = 0 \quad \text{Eq. (41)}$$

Como  $e^{i\omega t}$  nunca será zero, logo temos:

$$([K] - \omega^2[M])\{d'\} = 0 \quad \text{Eq. (42)}$$

Para que a Eq. (42) tenha solução não trivial, o determinante da matriz dos coeficientes de  $\{d'\}$  precisa necessariamente ser igual a zero, logo temos que:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad \text{Eq. (43)}$$

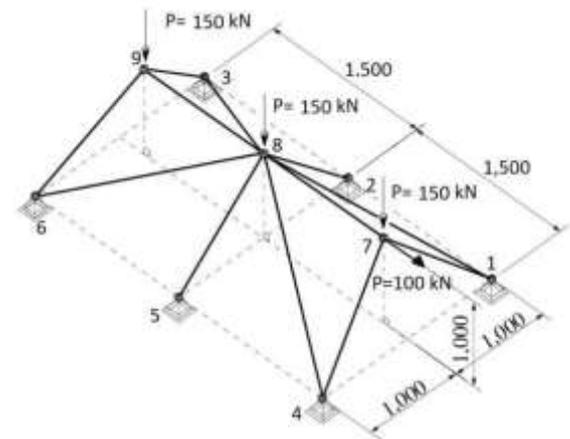
Vale ressaltar que a Eq. (43) é um conjunto de  $n$  equações, de modo que  $n$  é o número de graus de liberdade do sistema global.

## DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA ANALISADA PARA VALIDAÇÃO DO CÓDIGO

Com o intuito demonstrar e consequentemente validar o modelo desenvolvido, optou-se por fazer uma comparação de valores obtidos no software SAP2000, o qual iremos modelar uma treliça espacial com uma carga concentrada em um dos nós, de modo que vamos verificar os dados referentes às frequências naturais e deslocamentos nodais dessa estrutura.

Dessa forma, a estrutura escolhida foi uma treliça contendo 12 barras e 9 nós, com dimensões indicadas na figura 04 a seguir:

Figura 04: Treliça espacial



Fonte: (SILVEIRA, R. 2006) – modificada

O material que compõe a treliça são barras metálicas do tipo A-36, onde  $E = 200GPa$ ,  $A = 1,963 \times 10^{-3} m^2$  e  $\rho = 7849kg/m^3$ . Foram introduzidos esses dados tanto para algoritmo quanto para o SAP2000. Para as condições de contorno, sabemos que para esse caso, apenas os nós 2, 5 e 8 apresenta deslocamentos nodais, o restante tem deslocamento nulos uma vez que estão fixados por apoios.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na tabela 1 encontra-se os resultados dos deslocamentos para o caso estático tanto para o algoritmo desenvolvido em MATLAB (2018) quanto para o SAP2000 (versão 22.1.0).

Tabela 1 – Comparativo de deslocamentos entre MATLAB e SAP2000

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE O CÓDIGO FONTE E SAP2000									
MÉTODO	NÓ 7			NÓ 7			NÓ 7		
	u(x) (cm)	u(y) (cm)	u(z) (cm)	u(x) (cm)	u(y) (cm)	u(z) (cm)	u(x) (cm)	u(y) (cm)	u(z) (cm)
MATLAB	0,0330	0,0000	-0,0480	0,0234	0,0000	-0,0390	-0,0521	0,0000	-0,0905
SAP2000	0,0327	0,0000	-0,0483	-0,0233	0,0000	-0,0393	-0,0519	0,0000	-0,0906
ERRO	0,76%	0,00%	0,63%	0,43%	0,00%	0,72%	0,29%	0,00%	0,11%

Fonte: Autor, 2021.

Também se encontra na tabela 2 abaixo os resultados correspondentes às frequências naturais e períodos para os 9 diferentes modos de vibração.

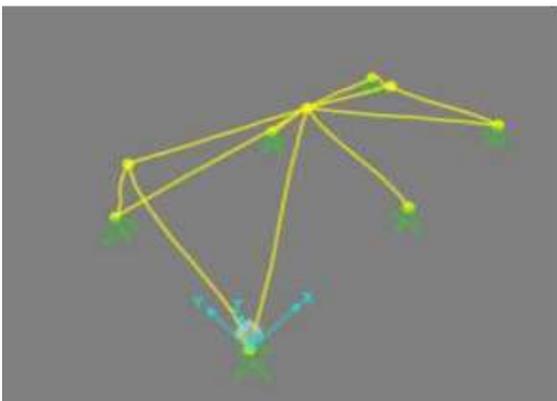
Tabela 2 – Frequências naturais e períodos

FREQUÊNCIAS NATURAIS E PERÍODOS					
MODOS	MATLAB		SAP 2000		Erro f(s <sup>-1</sup> )
	T(s)	f(s <sup>-1</sup> )	T(s)	f(s <sup>-1</sup> )	
1	0,0045	208,2	0,00482	207,45	0,36%
2	0,0035	285,93	0,00352	284,39	0,54%
3	0,0035	285,93	0,00351	284,60	0,47%
4	0,0030	335,07	0,00330	333,38	0,50%
5	0,0024	414,49	0,00242	412,52	0,48%
6	0,0024	414,49	0,00242	412,52	0,48%
7	0,0024	424,17	0,00237	421,91	0,53%
8	0,0018	543,84	0,00185	541,05	0,51%
9	0,0016	622,07	0,00162	618,85	0,52%

Fonte: Autor, 2021

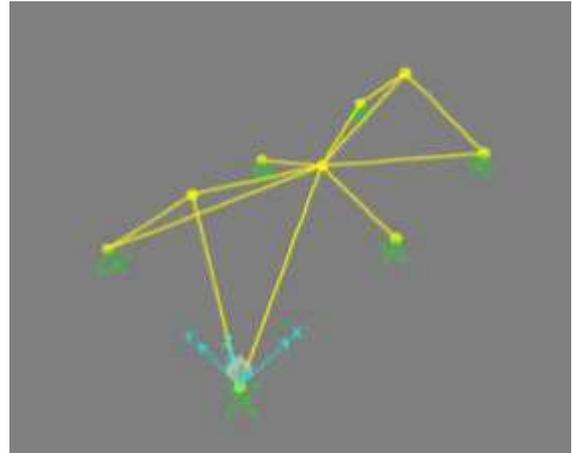
Também foram apresentadas as deformadas modais da estrutura, para os modos de vibração representados na tabela acima, conforme mostram as figuras abaixo.

Figura 05: 1º Modo de vibração (f=207,45 s<sup>-1</sup>)



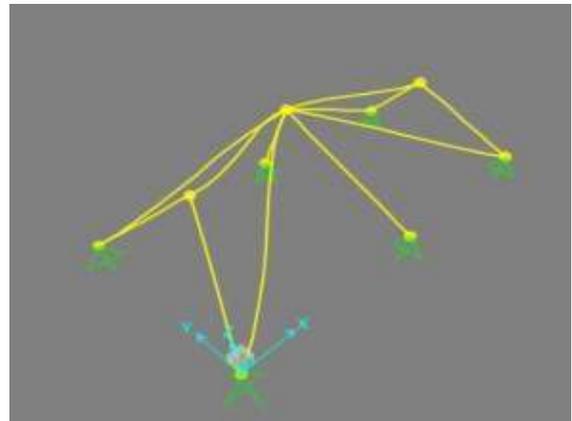
Fonte: Autor, 2021.

Figura 06: 2º Modo de vibração (f=284,39 s<sup>-1</sup>)



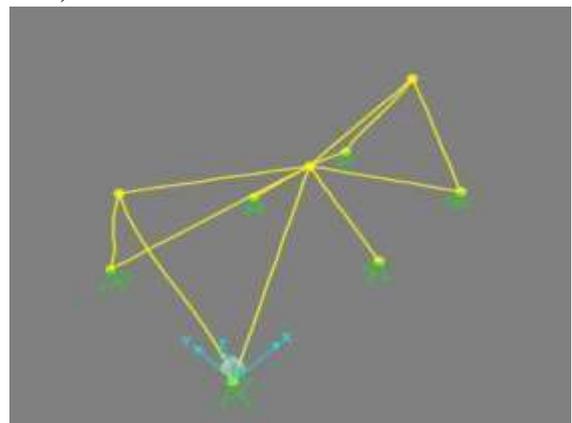
Fonte: Autor, 2021

Figura 07: 3º Modo de vibração (f=284,60 s<sup>-1</sup>)



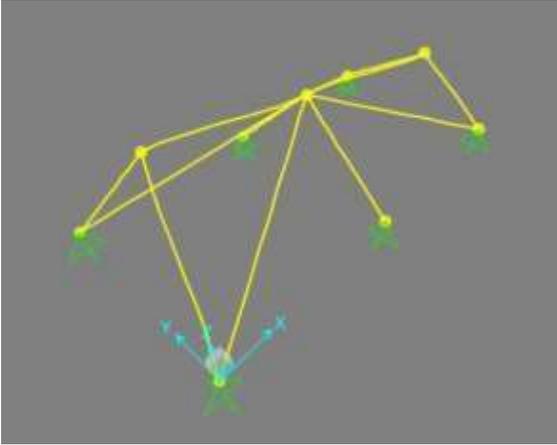
Fonte: Autor, 2021.

Figura 08: 4º Modo de vibração (f=333,381 s<sup>-1</sup>)



Fonte: Autor, 2021.

Figura 09: 5° Modo de vibração ( $f=412,52$  s $^{-1}$ )



Fonte: Autor, 2021.

Figura 10: 6° Modo de vibração ( $f=412,52$  s $^{-1}$ )

Fonte: Autor, 2021.

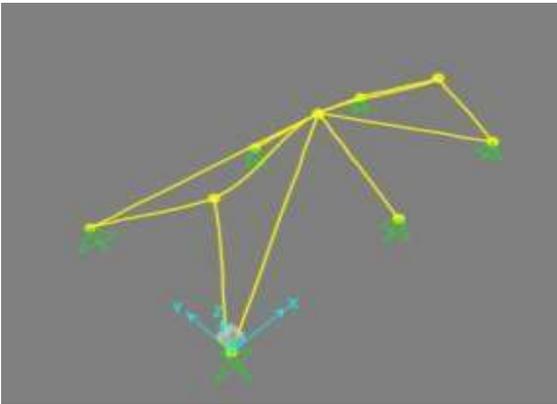
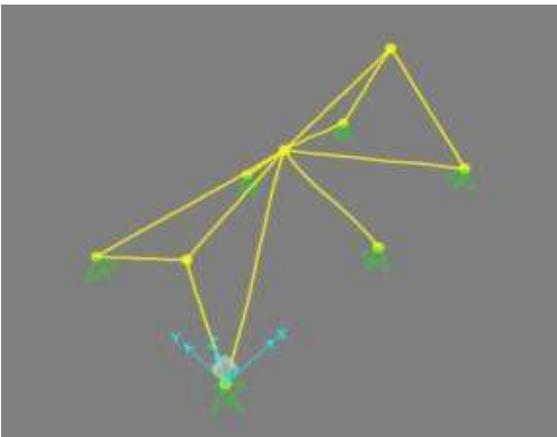
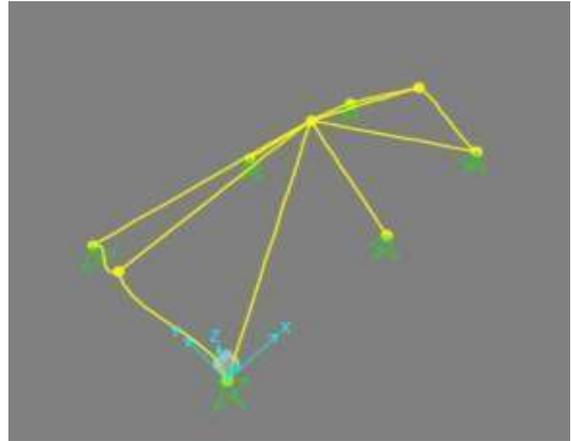


Figura 11: 7° Modo de vibração ( $f=421,91$  s $^{-1}$ )



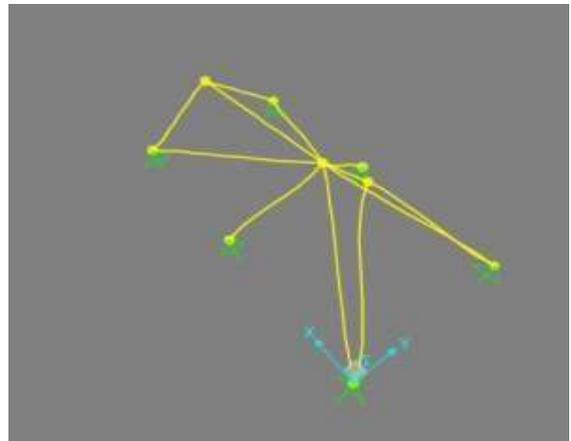
Fonte: Autor, 2021.

Figura 12: 8° Modo de vibração ( $f=541,05$  s $^{-1}$ )



Fonte: Autor, 2021.

Figura 13: 9° Modo de vibração ( $f=618,85$  s $^{-1}$ )



Fonte: Autor, 2021.

É importante salientar que o SAP2000 trabalha com a matriz de rigidez concentrada, ou seja, a matriz que obtida na Eq. (33) para caso espacial. Com isso, para termos de comparação, no código em matlab também foi utilizada a matriz de massa concentrada.

Nota-se que todos os resultados obtidos foram bem próximos aos obtidos pelo software SAP2000, o qual foi tido como base para a análise comparativa. Vale salientar que o código fonte desenvolvido na plataforma Matlab encontra-se no APÊNDICE deste documento.

## CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Ao longo deste estudo, a aplicação prática do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise de estruturas treliçadas foi destacada e avaliada em comparação com o renomado software SAP2000. Os resultados obtidos mostraram que o código desenvolvido em Matlab não apenas é robusto e preciso, mas também tem o potencial de ser uma ferramenta complementar no arsenal de engenheiros e acadêmicos.

Uma das principais conclusões deste trabalho é que o código baseado em Matlab apresentou resultados consistentes e alinhados com o SAP2000, evidenciando sua confiabilidade. Também se tornou claro que a compreensão profunda do MEF e suas implementações é crucial. Dependendo cegamente de softwares sem entender os princípios subjacentes pode resultar em erros catastróficos. Além disso, a importância da validação foi reforçada ao longo deste estudo, sugerindo que qualquer implementação, seja ela comercial ou acadêmica, deve ser submetida a rigorosos testes e comparações.

Olhando para o futuro e as perspectivas deste trabalho, várias oportunidades surgem. A primeira delas é a possibilidade de expansão para estruturas mais complexas. Enquanto este estudo focou em estruturas treliçadas, o código poderia ser adaptado e testado para outros tipos de estruturas, expandindo sua aplicabilidade. Também há potencial para a integração do código Matlab com outras plataformas CAD ou softwares de análise estrutural, o que aumentaria sua usabilidade. Por outro lado, o código atual pode ser refinado ainda mais, visando otimizá-lo para torná-lo mais eficiente.

A educação também se apresenta como um campo fértil. Há uma clara oportunidade de desenvolver módulos de formação para estudantes e profissionais interessados não apenas no MEF, mas também na implementação prática usando Matlab. Em termos de análises mais avançadas, estudos futuros poderiam explorar análises não-lineares, transientes e

térmicas, enriquecendo ainda mais a diversidade de aplicações do código. Por último, considerando a relevância do código para a comunidade global, torná-lo open-source poderia ser uma estratégia valiosa, permitindo que engenheiros e pesquisadores de todo o mundo contribuam, aprimorem e adaptem o código para suas necessidades específicas.

Em suma, este estudo não apenas apresentou conclusões valiosas, mas também abriu portas para várias oportunidades e trajetórias de pesquisa. É essencial que a comunidade de engenharia aproveite esse momentum, garantindo que as práticas de engenharia evoluam de maneira informada, precisa e inovadora.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me dá forças para seguir em frente a cada dia, mesmo com todas as dificuldades. Por nos dá força para passar por cada dificuldade que veio ao longo de toda a trajetória.

Ao meu Orientador, Professor Paulo Marcelo Vieira, que dedicou muito de seu tempo para me ensinar e eu poder da continuidade ao meu trabalho, bem como pela grande paciência que teve para comigo, muito obrigado.

Aos meus Pais, Régio Calixto Ferreira e Ivaneide dos Santos Ferreira, por todo apoio a qual veem me dando desde a entrada a universidade.

A minha Namorada, Manuela Santos Lima, pelo apoio de cada dia, com palavras de motivação contínua.

## REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Á. F. Método dos elementos finitos. 1. ed. Portugal: FEUP, 2003. 258 p. Disponível em: [http://www.alvaroazevedo.com/publication/s/books/livro\\_mef\\_aa\\_1ed/doc/livro\\_mef\\_aa.pdf](http://www.alvaroazevedo.com/publication/s/books/livro_mef_aa_1ed/doc/livro_mef_aa.pdf). Acesso em: 07 de jan. 2021.

ARAÚJO, C. Desenvolvimento de um algoritmo para análise estática e dinâmica de treliças planas. 2014. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal Fluminense. Niterói/RJ, 2014. Disponível em: <https://app.uff.br/riuff/handle/1/798>. Acesso em: 08 jan. 2021.

CUNHA, P. Rotinas computacionais para análise não linear geométrica de estruturas reticuladas. 2017. Dissertação (Pós-Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal Pernambuco. Recife, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/29625?mode=full>. Acesso em: 04 jan. 2021.

HIROTOMI, Vinicius I.W. Formulação do Método dos Elementos Finitos para a análise de treliças tridimensionais. 2014. p. 59. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Campo Mourão, 2014. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/6395>. Acesso em: 04 fev. 2021.

LOGAN, D. L. A first course in the finite element method. 5. ed. Platteville/USA: Cole Publishing Co., 2000. Disponível em: [https://kntu.ac.ir/DorsaPax/userfiles/file/Mechanical/OstadFile/dr\\_nakhodchi/DarylL.LoganAFirstCourse.pdf](https://kntu.ac.ir/DorsaPax/userfiles/file/Mechanical/OstadFile/dr_nakhodchi/DarylL.LoganAFirstCourse.pdf). Acesso em: 12 de jan. de 2021.

PAZ, M; KIM, Y. Structural Dynamics. Theory and Computation 6. ed. Louisville/USA: Ed. Springer, 1979. p. 353-p.370. Disponível em: <https://dokumen.pub/structural-dynamics-theory-and-computation-6nbsped-9783319947433-3319947435.html>. Acesso em: 15 jan. de 2021.

VIEIRA, G.D. *et al.* Desenvolvimento de programa didático para análise de vigas pelo método dos elementos finitos. *In:* Congresso brasileiro de educação em

engenharia, 46., 2018, Salvador. **Anais [...]**. Salvador: UNEB; Salvador: UFBA, 2018. p.3-p.8. Disponível em: [http://www.abenge.org.br/sis\\_artigos.php](http://www.abenge.org.br/sis_artigos.php). Acesso em: 04 de fev. 2021.

## APÊNDICE

```

%% Aluno: Lenilson Régio Ferreira
%% Formulação: Análise dinâmica de treliças Espaciais.
%% OBS:Linearidade Física

%% Entrada de dados
%Matriz das coordenadas dos nós da treliça
%OBS: O eixo cartesiano foi colocado no nó 1
%[coord]=m
coord = [1 0 0 0
        2 2 0 0
        3 4 0 0
        4 0 2 0
        5 2 2 0
        6 4 2 0
        7 0.5 1 1
        8 2 1 1
        9 3.5 1 1]; % coordenadas dos nós da treliça

% Possibilidade de introduzir materiais com propriedades diferentes,
% Variando o tipo de material (E) ou a seção transversal(A).
%Unidades de medidas
%[E]= GPa
%[A]=m²
%[rho]=kg/m³
E(1)=200*10^9; E(2)=200*10^9; E(3)=200*10^9; E(4)=200*10^9;
E(5)=200*10^9;E(6)=200*10^9;E(7)=200*10^9; E(8)=200*10^9;
E(9)=200*10^9; E(10)=200*10^9; E(11)=200*10^9; E(12)=200*10^9;

A(1)=0.001963; A(2)=0.001963; A(3)=0.001963; A(4)=0.001963; A(5)=0.001963;
A(6)=0.001963; A(7)=0.001963; A(8)=0.001963;
A(9)=0.001963; A(10)=0.001963; A(11)=0.001963; A(12)=0.001963;

rho(1)=7849; rho(2)=7849; rho(3)=7849; rho(4)=7849; rho(5)=7849; rho(6)=7849;
rho(7)=7849; rho(8)=7849; rho(9)=7849; rho(10)=7849; rho(11)=7849; rho(12)=7849;

% número de nós na estrutura
nn=size(coord,1);

%Matriz de conexão entre os nós formando as barras da treliça
% Exmplo: na primeira linha, temos 1 1 2, ou seja, a barra 1 é formada
% pelos nós 1 e 2 da matriz de coordenadas acima
conec = [1 1 7
        2 1 8
        3 2 8

        4 3 8
        5 3 9
        6 4 7
        7 4 9
        8 5 8
        9 6 8
        10 6 9
        11 7 8
        12 8 9];

%Número dos elementos, ou seja, esse comando nos diz o número de barras
%da estrutura completa
nel=size(conec,1);

%% processando os dados
%Iniciaremos criando uma matriz nula, cuja dimensão da mesma é 3 vezes o número de
%nós da estrutura
Kg=zeros(3*nn);
Mg=zeros(3*nn);
e=zeros(nn,1);

%Nesse primeiro comando de repetição (for) vamos obter as coordenadas de cada nó
%da estrutura, para poder saber que são x, y e z de cada nó e poder calcular
%o comprimento de cada barra
for i=1:nel
    no1=conec(i,2); %primeiro nó correspondente a cada barra
    no2=conec(i,3); %segundo nó correspondente a cada barra
    x=coord([no1 no2],2); %coordenadas x nos nós 1 e 2
    y=coord([no1 no2],3); %coordenadas y nos nós 1 e 2
    z=coord([no1 no2],4); %coordenadas z nos nós 1 e 2
    L=sqrt((x(2)-x(1))^2+(y(2)-y(1))^2+(z(2)-z(1))^2); %comprimento de cada barra

    A(i);
    E(i);
    rho(i);
    %Essa parte representa os graus de liberdade da estrutura, nos livros
    %eles são representados por u,v e w para as direções x, y e z
    %respectivamente

```

```

%Exemplo: Uma barra qualquer é formada por dois nós, certo? nó1 e nó2,
%portanto, para o nó1, temos: u(1)=GL(1), v(1)=GL(2) e w(1)=GL(3); já
%para o nó2, temos: u(2)=GL(4),V(2)=GL(5) e w(2)=GL(6). Isso vale para
% todas as barras que compõe a treliça.
GL(1)=3*no1-2;
GL(2)=3*no1-1;
GL(3)=3*no1;
GL(4)=3*no2-2;
GL(5)=3*no2-1;
GL(6)=3*no2;

%Matriz do elemento de barra em coordenadas locais, onde Cx=cos(teta)
%na direção de x, Cy=cos(teta) na direção y e Cz=cos(teta) na direção z
Cx=(x(2)-x(1))/L;
Cy=(y(2)-y(1))/L;
Cz=(z(2)-z(1))/L;
tt=[Cx^2 Cx*Cy Cx*Cz
    Cy*Cx Cy^2 Cy*Cz
    Cz*Cx Cz*Cy Cz^2];
mm=[1 0 0
    0 1 0
    0 0 1];

%Matriz de rigidez local referente a cada barra
Ke= (E(i)*A(i)/L)*[tt -tt
                  -tt tt];
Me=(rho(i)*A(i)*L/2)*[mm 0*mm
                      0*mm mm];

%Com esse segundo comando de repetição é possível pegar a matriz nula
%Kg e Mg que criamos (linhas 47 e 48) e adicionar os valores da matriz Ke
%criada
%Com isso, podemos encontrar a matriz de rigidez global da estrutura.
for j=1:6
    for k=1:6
        Kg(GL(j),GL(k))= Kg(GL(j),GL(k))+Ke(j,k);
        Mg(GL(j),GL(k))= Mg(GL(j),GL(k))+Me(j,k);
    end
end
end

%Criamos agora uma matriz nula de força, para em seguida substituir alguns
%valores dessa matriz por forças concentradas aplicadas a estrutura.
F2=zeros(3*nn,1);

%Introduzimos cargas pontuais, nesse caso, temos uma carga pontual no nó1,
%na direção do eixo z
%Unidade: [F2]=N
F2(21,1)=-150000;
F2(19,1)=-100000;
F2(24,1)=-150000;
F2(27,1)=-150000; %cargas pontuais

%eliminar graus de liberdade, elimine aqui todos os graus de liberdade
%cujos deslocamento você sabe que é nulo
elim=[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18];
KGR=Kg;
KGR:
KGR(:,elim)=[];
KGR(elim,:)=[];
MGR=Mg;
MGR:
MGR(:,elim)=[];
MGR(elim,:)=[];
F2(elim,:)=[];

```

```

%cálculo dos deslocamentos
d=(KGR\F2)
format short
% Cálculo da força normal em cada barra
p=setdiff(1:3*nn,elim); % pega os pontos não nulos
desloc=zeros(3*nn,1);
desloc(p)=d;
d=desloc;
format short

for i=1:nel
    no1=conec(i,2);
    no2=conec(i,3);
    x=coord([no1 no2],2); % coordenada em relação ao eixo x dos nós 1 e 2
    y=coord([no1 no2],3); % coordenada em relação ao eixo y dos nós 1 e 2
    z=coord([no1 no2],4); %coordenadas z nos nós 1 e 2
    L=sqrt((x(2)-x(1))^2+(y(2)-y(1))^2+(z(2)-z(1))^2); %comprimento de cada barra

    GL(1)=3*no1-2;
    GL(2)=3*no1-1;
    GL(3)=3*no1;
    GL(4)=3*no2-2;
    GL(5)=3*no2-1;
    GL(6)=3*no2;
    %Matriz do elemento de barra em coordenadas locais
    Cx=(x(2)-x(1))/L;
    Cy=(y(2)-y(1))/L;
    Cz=(z(2)-z(1))/L;
    tt=[Cx^2 Cx*Cy Cx*Cz
        Cy*Cx Cy^2 Cy*Cz
        Cz*Cx Cz*Cy Cz^2];

    Ke= (E(i)*A(i))/L*[tt -tt
        -tt tt];
    T=[-Cx -Cy -Cz Cx Cy Cz];

    C=(E(i)/L)*T;
    format short

    %Tensão em cada nó
    %[Tensao]=psi
    Tensao=C*d(GL);
    format short

    [a, D] = eig(KGR, MGR);
    [omegas,ii] = sort(sqrt(diag(D))); %Natural Frequencies
    omegas;
    f=0.16*omegas;
    a = a(:,ii); %Mode Shapes
    T = 2*pi./omegas;
End

```