



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JOSÉ PIO DOS SANTOS NETO

**Equações polinomiais do I ao IV grau: uma breve história do
seu desenvolvimento.**

Recife - PE
2024

JOSÉ PIO DOS SANTOS NETO

**Equações polinomiais do I ao IV grau: uma breve história do
seu desenvolvimento.**

Trabalho de conclusão de curso submetido à
Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em
Matemática da Universidade Federal Rural de
Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção
do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Me. Cícero Monteiro de Souza.

Recife - PE
2024

Dados Internacionais de Catalogação
na Publicação Universidade
Federal Rural de Pernambuco
Sistema Integrado de Bibliotecas
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos
pelo(a) autor(a)

J83ee Neto, José Pio dos Santos Neto
Equações polinomiais do I ao IV grau: uma breve história do seu desenvolvimento. / José Pio dos
Santos Neto. - 2024.
75 f. : il.

Orientador: Cicero
Monteiro de Souza.
Inclui referências.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, , Recife,
2024.

1. História da Matemática. 2. Equações. 3. Métodos Resolutivos. I. Souza, Cicero Monteiro de, orient. II.
Título

CDD

JOSÉ PIO DOS SANTOS NETO

Equações polinomiais do I ao IV grau: uma breve história do seu desenvolvimento.

Trabalho de conclusão de curso submetido à
Coordenação do Curso de Licenciatura Plena em
Matemática da Universidade Federal Rural de
Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção
do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Me. Cícero Monteiro de Souza.

Aprovado em: ____ / ____ / ____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Cícero Monteiro de Souza (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Filipe Andrade da Costa
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Prof. Dr. Fabiano Barbosa Mendes da Silva
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE

Recife - PE
2024

AGRADECIMENTOS

Chegar até aqui foi uma tarefa árdua, e durante o processo houve momentos em que desistir teria sido a decisão mais fácil. Diante disto, gostaria de agradecer primeiramente a Deus e Nossa Senhora, por toda força, sabedoria e bênçãos que me concederam durante todo esse tempo.

Agradeço também aos meus pais Carlos Alberto Oliveira dos Santos, e em especial minha mãe Rosa Herculano Vieira, que mesmo não tendo oportunidades educacionais, sempre me incentivou e aos meus irmãos a estudar, e como ela diz, “ser alguém na vida”. Aos meus irmãos, Elissandra Reivia Vieira da Silva, Elizandra Raiane Vieira da Silva e João Lucas Vieira dos Santos, que foram minha base, que me sustentam e me incentivam a cada dia. Vocês me ensinaram o significado de família.

Agradeço em especial, aos anjos que me guiam, em particular minha irmã gêmea Maria Carolina Vieira dos Santos (*in memorian*), que me deixa saudades até os dias de hoje, assim como meu irmão, João Carlos Vieira dos Santos (*in memorian*). Vocês me ensinaram o valor da vida em tão pouco tempo.

Agradeço a minha amiga, companheira, namorada e esposa Paloma Fernanda Silva Barros, que me ensinou sobre o sentido de coragem e me acalentou nos momentos mais difíceis de ansiedade e frustração. Nela encontro meu porto seguro para querer estar todo dia, para todos os dias.

Agradeço aos meus amigos de infância Daniel, Lucas, aos dois Pedros Henriques, Andson, Aslay, Henrique José, Cássio, César, Thiago e tantos outros que tenho a oportunidade de crescer ao lado deles.

Agradeço ao meu Orientador Cícero Monteiro de Souza, que ofertou as disciplinas de Desenho Geométrico, e História da Matemática para prática docente. De onde partiu a ideia e vontade de desenvolver este trabalho. Agradeço por me conduzir e dedicar tanto esforço e tempo. Sem dúvidas uma inspiração para mim, e tantos outros alunos.

Aos professores que aceitaram participar da banca examinadora deste trabalho, Filipe Andrade e Fabiano Barbosa, sou extremamente honrado por vocês estarem me auxiliando na finalização do curso.

A todos os professores do Departamento de Matemática que me conduziram no curso e servem de inspiração, em especial, Severino de Barros, Anete Soares, Bárbara Costa, Clessius Silva, Edgar Corrêa, Eudes Mendes, Renato Teixeira, Thamires Santos, Thiago Dias

e Thiago Tanaka. Obrigado por me conduzirem durante o curso.

A UFRPE, a universidade mais Ruralinda do Brasil, por todo seu acolhimento aos estudantes.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma História da Álgebra, com ênfase na evolução dos conceitos e na formalização das equações polinomiais do primeiro ao quarto grau, além de analisar os métodos resolutivos desenvolvidos ao longo do tempo. Inicialmente, são apresentadas de maneira cronológica as contribuições algébricas das civilizações primitivas, passando pelo momento crucial da sistematização da matemática pelos gregos, até a queda do Império Romano. Em seguida, com a chegada da Idade Média, as invasões árabes, a criação da Casa da Sabedoria e os centros de traduções, a matemática torna-se acessível a todos os povos e, em consequência, a álgebra começa a ter uma perspectiva de grande importância na resolução de problemas, principalmente nas transações comerciais. No final da Idade Média já se conseguia resolver equações algébricas de primeiro e segundo grau, mas ainda sem se considerar as raízes negativas. Finalmente, no século XVI foram desenvolvidas a concepção do cálculo das raízes imaginárias e a solução das equações do terceiro e quarto grau. Todavia, foi somente com o matemático francês François Viète (1540 -1603) que a álgebra começou a se transformar em uma álgebra moderna com a criação de uma notação literal com a representação de números, conhecidos ou não, através de letras.

Palavras chave: História da Matemática; Equações algébricas; Métodos Resolutivos.

ABSTRACT

The present work aims to present a History of Algebra, with an emphasis on the evolution of concepts and the formalization of polynomial equations from the first to the fourth degree, as well as to analyze the solution methods developed over time. Initially, the algebraic contributions of primitive civilizations are presented chronologically, covering the crucial moment of the systematization of mathematics by the Greeks until the fall of the Roman Empire. Then, with the arrival of the Middle Ages, the Arab invasions, the establishment of the House of Wisdom, and the translation centers, mathematics became accessible to all peoples, and consequently, algebra began to gain significant importance in problem-solving, especially in commercial transactions. By the end of the Middle Ages, first- and second-degree algebraic equations could already be solved, although negative roots were still not considered. Finally, in the 16th century, the concept of imaginary roots and the solution of third- and fourth-degree equations were developed. However, it was only with the French mathematician François Viète (1540 – 1603) that algebra began to evolve into modern algebra, with the creation of a literal notation for the representation of numbers, whether known or unknown, through letters.

Keywords: History of Mathematics; Algebraic Equations; Resolution Methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 — Parte do Papiro de Moscou mostrando o problema de um tronco de pirâmide quadrada.....	15
Figura 2 — Papiro de Rhind.....	16
Figura 3 — Antiga Mesopotâmia	19
Figura 4 — Tábua de argila da mesopotâmia.....	21
Figura 5 — Quadrado mágico	26
Figura 6 — Problema do quadrado mágico.....	26
Figura 7 — Redução do problema do quadrado mágico	27
Figura 8 — Livro os elementos de Euclides.....	30
Figura 9 — O quadrado da soma.....	31
Figura 10 — Viés geométrico das equações para os gregos	31
Figura 11 — Divisão do segmento de reta	33
Figura 12 — Solução do problema 28 do livro VI de Euclides	33
Figura 13 — Solução do problema 29 do livro VI de Euclides	35
Figura 14 — Manuscrito da época do Califado Abássida.....	44
Figura 15 — Al-Khwarizmi (c.780 a 850 d.C.).....	45
Figura 16 — 1º forma de completar quadrados.....	47
Figura 17 — 2º forma de completar quadrados.....	48
Figura 18 — Rotas de transmissão do conhecimento matemático.....	55
Figura 19 — Leonardo Fibonacci.....	56
Figura 20 — Gerônimo Cardano (1501-1576).....	62
Figura 21 — Ars Magna.....	63
Figura 22 — Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557)	63
Figura 23 — François Viète (1540 - 1603)	69

SUMÁRIO

1. Introdução	11
2. História das equações: da pré-história à Idade Antiga	13
2.1 – A civilização egípcia.....	14
2.2 – Mesopotâmia: uma matemática em tábuas de argila.	19
2.3 – A Matemática na China.	25
2.4 – A sintetização da Matemática na Grécia.....	27
2.4.1 - A sistematização da matemática.	28
2.4.2 - As contribuições de Euclides de Alexandria.	29
2.4.3 – As contribuições de Diofanto de Alexandria.	35
3. O desenvolvimento das equações no período medieval.....	37
3.1 - China nos tempos medievais	37
3.2 - A evolução algébrica na Índia.	39
3.3 - Avanço Islâmico	42
3.4 - A Matemática europeia na Idade Média.....	51
4. A Matemática europeia renascentista.....	58
4.1 - Modernização da Matemática Ocidental	58
5. Considerações Finais	74
6. Referências	75

1. Introdução

A Álgebra é o ramo da Matemática que estuda, analisa e lida com manipulação de símbolos, construção e resolução de equações, ou seja, utiliza conjuntamente letras, símbolos e números para representar um valor desconhecido. Em virtude disso, ela permite que se formule, manipule e resolva problemas de maneira mais geral e abstrata.

Entretanto, para que se concretizassem os estudos algébricos sobre as equações, ou até mesmo existisse o conceito da Álgebra, foi-se necessária uma longa caminhada durante séculos, começando pelas noções mais primitivas da matemática.

Portanto, neste presente trabalho pretende-se buscar através da História da Matemática, os motivos, necessidades, utilização, potencialidades e curiosidades sobre desenvolvimento algébrico das equações polinomiais do I ao IV grau, incluindo os seus métodos resolutivos.

Para isto, buscou-se através de uma revisão bibliográfica a partir de grandes autores em História da Matemática como Boyer (2012), Struik (1992) e Eves (2011), dentre outros, para toda fundamentação histórica da matemática que servem de base para entender as etapas do processo de construção algébrico das equações.

Além dos autores acima citados, fez-se necessário recorrer a outros pesquisadores para uma completude dos processos algébricos das equações ao longo da história, como Pedroso (2016), Lima (1987) e Roque (2012). Assim sendo, esperamos que esse estudo possa facilitar a compreensão dos futuros estudantes e pesquisadores, no que concerne ao desenvolvimento das equações.

Em razão disso, esse trabalho consiste em três partes temporais que retratam a história das equações desde a Idade Antiga até o período renascentista, apresentando características históricas que contribuíram para a construção das equações, desde resquícios arqueológicos de civilizações antigas, até documentos modernos sobre a matemática.

Na primeira parte, trata-se da contribuição de civilizações antigas para o desenvolvimento algébrico, como os povos egípcios, chineses, babilônios e gregos. Com isso, tentamos responder perguntas como: quais eram suas motivações e limitações? E, quais métodos eram utilizados para resolução dos problemas práticos cotidianos?

A segunda parte, aborda o desenvolvimento da matemática durante a Idade Média, dando ênfase a civilizações como Árabe, Indiana e Europeia, incluindo os principais cientistas de cada uma delas, como: Brahmagupta (598 - 668), Bhaskara (1114 - 1185), Al-Khwarizmi (780 - 859) e Fibonacci (1170 - 1250), dentre outros. É neste período que teremos a maior expansão dos estudos matemáticos no que se refere à formalização dos conceitos algébricos, o

que culmina com a resolução das equações de segundo grau, embora, ainda sem a admissão das raízes complexas.

Por fim, a terceira parte é destinada ao período renascentista do final do século XV ao século XVII, quando são desenvolvidas fórmulas gerais das equações completas de II, III e IV graus, com todas as raízes possíveis. Destacando também os principais teóricos e suas contribuições para o desenvolvimento da álgebra moderna como a conhecemos hoje.

Portanto, espera-se que essa história da álgebra, mesmo que feita de forma resumida, mas com uma grande abrangência temporal dos principais momentos, desde as concepções mais primitivas até a concretização dos métodos resolutivos através de comprovações demonstrativas modernas, possa contribuir com estudantes, professores e todas as pessoas interessadas em matemática e sua história a entender como se deu o processo de desenvolvimentos das equações algébricas.

2. História das equações: da pré-história à Idade Antiga

A história do desenvolvimento dos processos algébricos remonta a um período tão antigo quanto o próprio desenvolvimento da matemática. Embora incerto, certas civilizações propunham enigmas ou problemas que continham um valor desconhecido, ou como dizemos, uma solução desconhecida.

Para analisarmos a história das equações, é necessário buscar em suas origens, o motivo e necessidade pelos quais foram criados problemas e ferramentas capazes de solucioná-los. Diante disto, olhemos um pouco para o passado, quando as primeiras civilizações se formaram no oriente. Segundo Eves (2011):

A matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento veio a surgir com a evolução para formas mais avançadas de sociedade. Foi ao longo de alguns dos grandes rios da África e da Ásia que se deu o aparecimento de novas formas de sociedade: o Nilo na África, o Tigre e o Eufrates na Ásia Ocidental, o Indo e depois o Ganges no sul da Ásia Central e o Howang Ho e depois o Yangtze na Ásia Oriental. Com a drenagem de pântanos, o controle de inundações e a irrigação era possível transformar as terras ao longo desses rios em regiões agricultáveis ricas. Projetos extensivos dessa natureza não só serviram para ligar localidades anteriormente separadas, como também a engenharia, o financiamento e a administração desses projetos, e os propósitos que os motivaram requeriam o desenvolvimento de considerável tecnologia e da matemática concomitante. (Eves, 2011, p. 57).

Entretanto, na medida em que a densidade populacional aumentava, a quantidade de recursos ficava cada vez mais escassa, necessitando de um maior entendimento das áreas econômicas, agrônomas, medicinais e matemáticas. Essa necessidade era fundamental para estabelecer um calendário de colheita e plantio, técnicas para armazenamento e distribuição de alimentos, construção de pontes, canais e reservatórios que utilizassem o maior potencial dos recursos hídricos locais, além das taxas e cobranças dos impostos e de mercadores.

E assim, a matemática se desenvolveu a partir das necessidades práticas cotidianas do ser humano, sendo este o principal motivo de sua formalização. Segundo Struik (1992), foi deste ponto que o raciocínio passou para uma nova etapa do entendimento lógico matemático, chamado “aritmético-algébrico”.

Porém, uma ciência cultivada durante séculos como um ofício especial e cuja tarefa não é apenas aplicar, mas também ensinar os seus segredos, desenvolve tendências para a abstracção. Gradualmente, ela virá a ser estudada por si própria. A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma

ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos, mas não mais do que isso da geometria teórica. (Struik, 1992, p. 47)

Partindo dessa premissa, veremos a história das equações polinomiais sob uma visão da história da álgebra desde da antiguidade até os modelos mais modernos de resolução, e como estes, foram cruciais para o desenvolvimento da Matemática.

Portanto, faz-se necessário uma visão histórica das primeiras civilizações que marcaram a humanidade através de suas contribuições, e como estas fundamentaram uma base matemática que serviu de alicerce para as demais ciências, partindo de um recorte cronológico compreendido entre 4000 a.C. e o início da Idade Média.

2.1 – A civilização egípcia

Entre as grandiosas civilizações que floresceram milênios antes da era cristã, destaca-se a civilização egípcia como uma das mais antigas e prósperas, cujos registros e documentos remontam ao século XXX a.C., ou mais precisamente, entre 3150 a 3100 a.C. O Egito localiza-se ao nordeste do continente africano, onde faz ligação com o Oriente Médio, sendo banhado pelo rio Nilo.

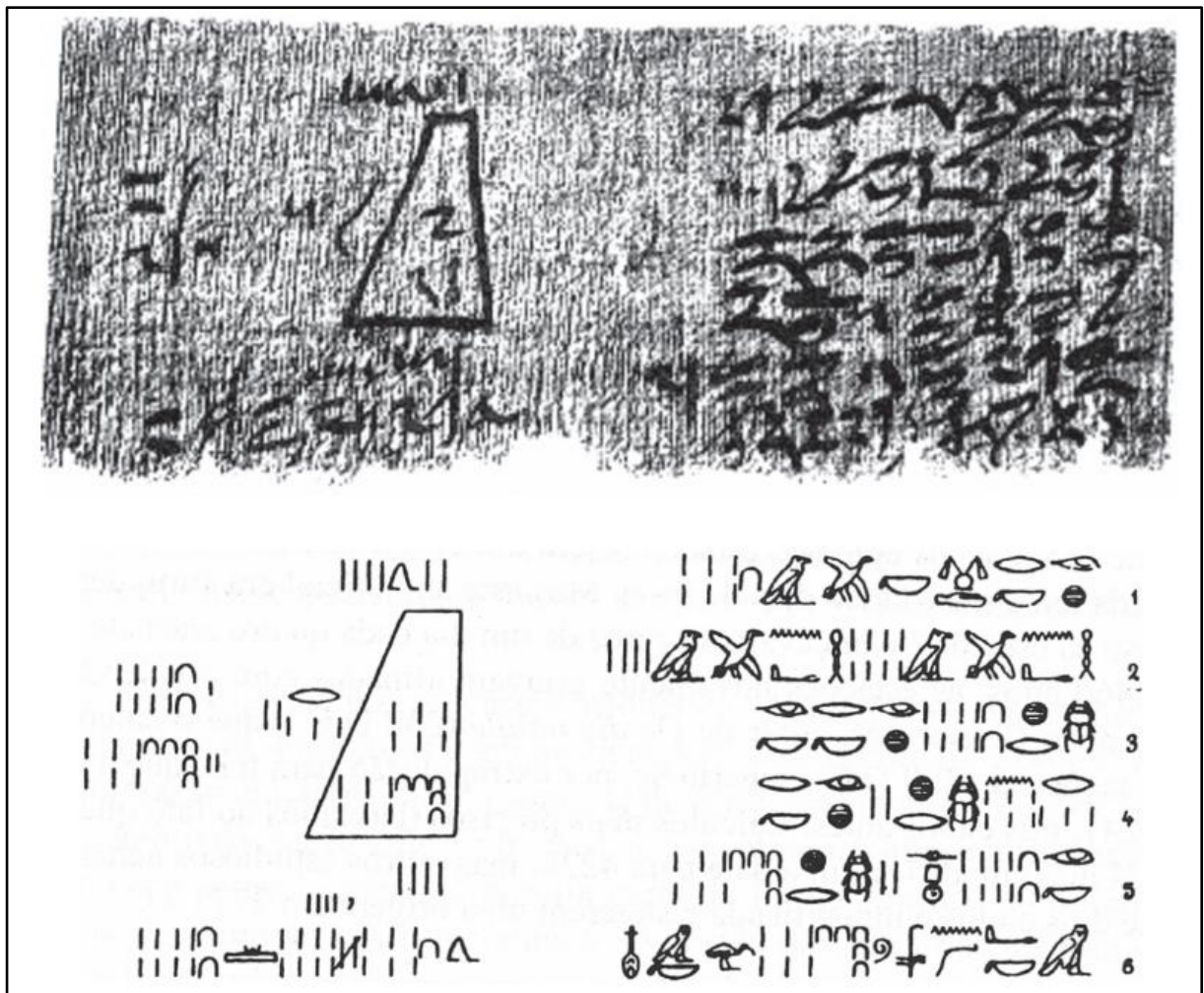
Considerada uma das primeiras civilizações agrárias e camponesas, sua localização estratégica demandou estudos sobre as estações, colheitas e a elaboração de um calendário preciso para compreender os ciclos de cheias. Além disso, são mundialmente reconhecidos pelo processo de mumificação, e pelas construções das grandes pirâmides e a esfinge de Gizé.

Uma das contribuições mais significativas, senão a principal, dos egípcios foi a invenção de sua base de escrita numérica e linguística hieroglífica, presente nos antigos manuscritos conhecidos como Papiros¹ ou pergaminhos. Esses pergaminhos narram a história da antiga civilização egípcia, constituindo-se como uma fonte fundamental de conhecimento.

No século XVIII, após várias expedições e escavações arqueológicas, foram encontrados alguns papiros, com conteúdo de fundamental importância, de onde resultou a maior parte das pesquisas sobre a matemática egípcia. Dentre os principais papiros destacam-se: Papiro de Kahun, o de Berlim, o de Moscou e o Papiro Rhind.

¹ Etimologicamente, a palavra "Papiro", originada do latim "papyrus," refere-se a uma planta de nome científico *Cyperus papyrus*, também reconhecida como precursora do papel. O processo de fabricação do papiro envolvia a extração do caule da planta, seguida de corte, umedecimento e prensagem. Após o processo de martelagem, a folha de papiro era formada. Fonte: A origem do Papel (unesp.br).

Figura 1 — Parte do Papiro de Moscou mostrando o problema de um tronco de pirâmide quadrada



Fonte: Boyer, 2012, p. 35

Segundo Boyer (2012, p. 30) dentre os documentos existentes em relação à matemática egípcia, um rolo de papiro medindo cerca de 0,30 m de altura por 5,0 m de comprimento, que se encontra no Museu Britânico, é considerado o mais importante. Em 1858, este papiro foi comprado por um escocês chamado A. Henry Rhind (1833 - 1863), e dado a isso, o papiro ganhou seu nome, ficando conhecido como papiro de Rhind. Entretanto, alguns chamam de papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o escreveu em 1650 a.C. Segundo Struik (1992):

Durante muito tempo, o nosso campo histórico mais rico repousava no Egito, devido à descoberta, em 1858, do chamado Papiro de Rhind, escrito por volta de 1650 a. C., mas que continha material ainda mais antigo. (Struik, 1992, p. 49).

Ainda dito por Struik, o documento supracitado possui uma gama de 85 problemas, que envolvem questões práticas do cotidiano. Entretanto Santos e Veiga (2002), assumem que o papiro de Rhind não trata apenas de 85 problemas, mas de 87, assim como algumas tabelas com valores de frações.

Figura 2 — Papiro de Rhind



Fonte: Google imagens

Em 1799, soldados do exército de Napoleão Bonaparte descobriram no Egito a Pedra da Rosetta, que possui inscrições em três linguagens: Grega, Demótica e Hieroglífica. Essa descoberta foi fundamental para compreensão dessas linguagens e possibilitou a tradução destes e de outros papiros.

Em sua maior parte, os problemas matemáticos presentes nos papiros egípcios caracterizam-se pelo seu caráter aritmético, prático e utilitário. Dessa forma, esses problemas envolviam a resolução de desafios cotidianos, como a divisão de bens ou recursos, como terras e colheitas.

Utilizando a linguagem algébrica atual, muitos dos problemas podem ser reescritos, como problemas do tipo $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, em que a, b e c são termos conhecidos, e x é a incógnita (valor desconhecido). De acordo com Struik (1992, p. 54), o termo empregado a incógnita denominava-se *hau* ou *aha*, que significa montão. A álgebra egípcia é, por isso, denominada por vezes “cálculo aha”.

Para a solução destes problemas algébricos, os egípcios desenvolveram um método intuitivo, que aplica propriedades aritméticas na equação, que mais tarde foi chamada de método de falsa posição.

Os problemas egípcios descritos até agora são de tipo digamos, aritmético, mas há outros que merecem a designação de algébricos. Não se referem a objetos concretos específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma $x + ax = b$ ou $x + ax + bx = c$, onde a , b , c são conhecidos e x é desconhecido. A incógnita é chamada de “aha”. [...] O Prob 24, por exemplo, pede o valor de aha, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é então comparado com o resultado que se pretende, e usando proporções chega-se à resposta correta. No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + \frac{1}{7}x$ é 8 em vez de 19 como se queria. $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $2 + 1/4 + 1/8$ para obter a resposta: Ahmes achou que a resposta era $16 + 1/2 + 1/8$. Então verificou sua resposta mostrando que se a $16 + 1/2 + 1/8$ somarmos um sétimo disto (que é $2 + 1/4 + 1/8$), de fato obteremos 19. (Boyer, 2012, p. 32)

Deste modo, o método da falsa posição, utilizava por meios práticos, tentar possíveis soluções que iriam sendo testadas até que se chegasse ao resultado final. Para uma melhor compreensão, faremos a solução de um dos problemas que podem ser traduzidos como uma equação de primeiro grau, apresentados por Bertato (2020).

O problema 26 do papiro Rhind diz o seguinte: Uma quantidade cuja a quarta parte lhe é adicionada resulta em 15.

Considerando a linguagem atual podemos reescrever esse problema da seguinte maneira:

$$x + \frac{1}{4}x = 15 \quad (1)$$

1º passo: Assuma um valor inicial para x , de forma que anule o termo fracionário, assim tome $x_1 = 4$, teremos o seguinte

$$4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$$

2º passo: Note que, se visualizarmos o lado direito (2º membro da equação) para fazermos resultar em 15, precisamos multiplicar por 3. Desta forma, multiplicaremos nosso termo inicial por esse valor também. Assim seja (1)

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

Isolando o x , obtemos

$$x(1 + \frac{1}{4}) = 15$$

Tomando $x_1 = 4$, vimos que

$$4 \cdot (1 + \frac{1}{4}) = 5$$

Multiplicando por 3

$$4 \cdot 3 \cdot (1 + \frac{1}{4}) = 5 \cdot 3$$

Obtemos então

$$12 \cdot (1 + \frac{1}{4}) = 15$$

Logo o resultado procurado para a incógnita é o valor $x = 12$

Embora simples, o método egípcio traz de maneira muito prática uma forma de resolvermos problemas de 1º grau. Esta técnica, por sua vez, também implicará em um método bastante semelhante dos egípcios de resolver problemas de 2º grau.

Dentre os papiros, segundo Eves (2011), poucos trazem uma aplicação ou problemas recorrentes de equações quadráticas. Um dos únicos exemplos que se tem relatos, está contido no papiro de Kahun.

De acordo com Eves (2011), o problema aparece na forma: Uma dada superfície de 100 unidades de Área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como 1: 3/4.

De acordo com Pedroso (2010, p. 2) podemos fazer a releitura desse problema da seguinte forma: A soma de áreas de dois quadrados é 100 unidades. O triplo do lado de um deles é igual ao quádruplo do lado do outro.

Utilizando uma linguagem moderna, obtemos um sistema linear que simbolicamente tem o seguinte formato:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & (1) \\ 3y = 4x & (2) \end{cases}$$

Seguindo o método da falsa posição, podemos resolver esse problema, da seguinte forma:

Tome um valor arbitrário para x ou y . Neste caso tome $x_1 = 3$, por consequência em (2), teremos que $y_1 = 4$.

Substitua esses valores em (1), assim teremos:

$$3^2 + 4^2 = 25$$

Queremos que o lado direito seja equivalente a 100, para isso precisamos multiplicar 25 por 4. Façamos isso em ambos os lados:

$$\begin{aligned} 4(3^2 + 4^2) &= 25 \cdot 4 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 4^2 &= 100 \end{aligned}$$

Note que, agora só precisamos expressar os valores como potências quadráticas. Sabendo que $4 = 2^2$, temos que:

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 4^2 &= 100 \\ \Leftrightarrow (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 &= 100 \end{aligned}$$

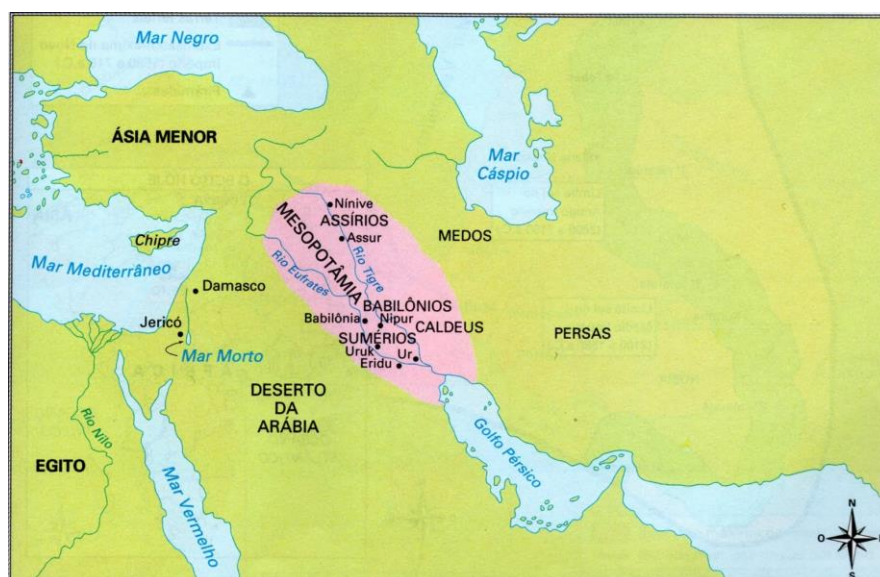
Desta forma, a solução esperada é $x = 6$ e $y = 8$, que satisfaz as condições (1) e (2).

Portanto, por mais que a motivação dos egípcios tenha recaído sobre problemas e atividades práticas cotidianas, é inegável todo conhecimento intuitivo utilizado dentro de uma lógica matemática.

2.2 – Mesopotâmia: uma matemática em tábuas de argila.

A região conhecida como Mesopotâmia, cujo nome em grego significa "terra entre rios", é considerada como berço da humanidade, diante de tantos povos que surgiram na região conhecida como crescente fértil, delimitada pelos rios Tigre e Eufrates. Atualmente, essa região corresponde em grande parte aos territórios do Iraque e da Síria.

Figura 3 — Antiga Mesopotâmia



Fonte: AIO photos, 2022.

Inúmeros povos se estabeleceram nesta região, onde disputaram por território, trocaram acordos e conhecimentos. Somente na região da Mesopotâmia, residiam os povos Sumérios, Acádios, Amoritas e Babilônios. No final do último milênio antes de Cristo, já haviam estabelecido civilizações inteiramente complexas, dotadas de conhecimento e ciência. Segundo Boyer (2012):

Ali, os sumérios tinham construído casas e templos decorados com cerâmica e mosaicos artísticos em padrões geométricos. Governantes poderosos uniram os principados locais em um império que realizou vastas obras públicas, como um sistema de canais para irrigar a terra e controlar as inundações entre os rios Tigres e Eufrates, onde as inundações dos rios não eram previsíveis como as do vale do Nilo. O tipo de escrita cuneiforme desenvolvido pelos sumérios durante o quarto milênio provavelmente é anterior à hieroglífica egípcia. (Boyer, 2012, p. 39)

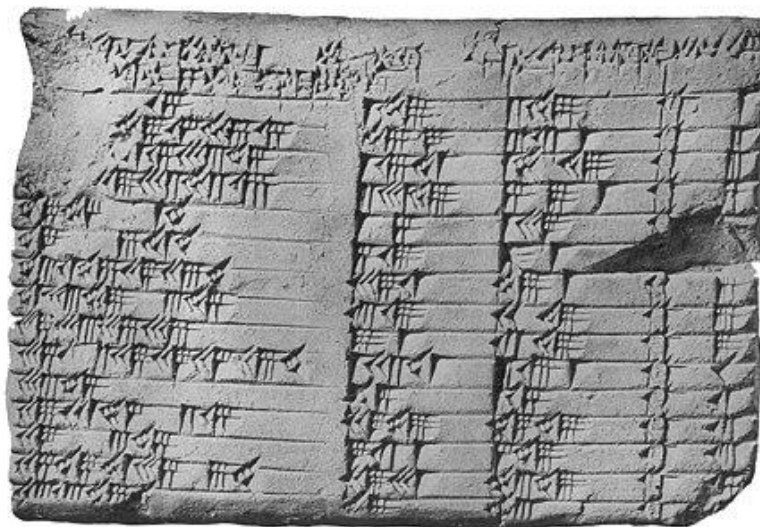
Comumente, quando se fala da Mesopotâmia liga-se a civilização babilônica, entretanto, Boyer (2012) ainda nos diz que:

As civilizações antigas da Mesopotâmia são frequentemente chamadas babilônicas, embora tal designação não seja inteiramente correta. A cidade de Babilônia não foi inicialmente, nem foi sempre em períodos posteriores, o centro da cultura associada com os dois rios, mas a convenção sancionou o uso informal do nome “babilônia” para a região durante o período de cerca de 2.000 a.C. até aproximadamente 600 a.C. (Boyer, 2012, p. 39)

Assim, o que temos de registros sobre as práticas e vivências destas civilizações, encontram-se nas tábuas de argilas em escrita cuneiforme encontradas durante do século XIX a. C., que hoje estão sob posse de algumas universidades em Columbia, Pensilvânia e Yale.

Segundo Boyer (2012, p. 40), só em um local, na área da antiga Nipur, temos cerca de 50.000 tábuas, já de acordo com Eves (2011, p. 58) são quantificados em torno de meio milhão de tábuas, onde dessas, pelo menos umas 400 são estritamente sobre matemática. Por exemplo a tábua de Plimpton 322, apresentada abaixo, uma das principais tábuas sobre a matemática babilônica escrita por volta de 1800 anos a.C.

Figura 4 — Tábua de argila da mesopotâmia



Fonte: Wikipedia (Plimpton 322)

O material dessas tábuas mostra que os babilônicos já possuíam uma familiaridade com equações de segundo grau e até mesmo terceiro grau. Os problemas matemáticos, surgiam de situações cotidianas cujos resultados obtinham de forma instrucional, ou seja, passo a passo dos processos necessários para resolução.

De acordo com Boyer (2012), um exemplo de equação de 2º grau apresentado nas tábuas, é o caso onde aparece, por exemplo, um problema que pede o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30 (notação em sexagesimal).

Tome a metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, o que dá 0;15; some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado. (Boyer, 2012, p. 44).

Segundo Pedroso (2010, p. 3) em uma notação moderna para esse problema pode ser reescrito na forma $x^2 - x = 870$. Isso se dá pelo fato de que os babilônios desenvolveram um avançado sistema numérico posicional sexagesimal, ou seja, de base 60. Esse sistema trazia grandes vantagens para os cálculos, especialmente com frações, pois o número 60 possui muitos divisores naturais. Ainda, segundo Pedroso (2010) a solução deste problema pode ser vista como: Tome a metade de 1, que é 0,5, e multiplique 0,5 por 0,5, o que dá 0,25; some isto a 870, o que dá 870,25. Isto é o quadrado de 29,5. Agora, some 0,5 a 29,5, e o resultado é 30, o lado do quadrado.

Essa descoberta é fundamental, pois conseguimos classificar os modelos quadráticos que a civilização babilônica já tinha conhecimento resolutivo. Equivalentemente ao problema

acima, de acordo com Boyer (2012. p 44) podemos reler esse problema de segundo grau das seguintes formas: *1ª forma*: $x^2 + px = q$, *2ª forma*: $x^2 = px + q$, *3ª forma*: $x^2 + q = px$.

Esse modelo, embora prático, nos leva a um método muito eficiente e funcional de resolver equações quadráticas. Seguindo a retórica babilônica, façamos a seguinte releitura do método para solucionar o problema $x^2 - x = 870$, que podemos interpretar como $x^2 + px = q$, assim temos o seguinte:

1º passo: tome a metade de p

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = a.$$

sendo "a" uma constante qualquer.

2º passo: multiplique a por a

$$\Rightarrow \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2}\right)^2 = b.$$

sendo "b" uma constante qualquer.

3º passo: some isto a q, assim

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

4º passo: agora some "a" a r

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \left(\frac{p}{2}\right) = x$$

E isso é o lado do quadrado.

Assim a raiz do problema pode ser extraída através da expressão

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \left(\frac{p}{2}\right) \quad (1)$$

como por exemplo para a equação $x^2 - x = 870$, temos $x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 870} + \left(\frac{1}{2}\right) = 30$ confirmando o resultado do escriba.

Conforme Boyer (2012), a civilização babilônica dispunha de ferramentas e costumes para resolver esses problemas, como este acima, que podem ser traduzidos como um sistema linear de equações, do tipo:

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

De acordo com Boyer (2012, p. 45), uma tábua cuneiforme de Yale, pede a solução do sistema $x + y = 6;30$ e $xy = 7;30$ (notação em sexagesimal). E as instruções do escriba são essencialmente as seguintes.

Primeiro ache $\frac{x+y}{2} = 3;15$. e então ache $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45$. A seguir $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45$ e $\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 1;45$. Logo, $\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) = 3;15 + 1;45$ e $\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x+y}{2}\right) = 3;15 - 1;45$. (Boyer, 2012, p. 45)

Novamente transformando da base sexagesimal para base decimal, podemos reler esse método como: Seja o sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} x + y = 6,5 \\ xy = 7,5 \end{cases}$$

Façamos os seguintes passos:

Primeiro, note que

$$\frac{x+y}{2} = 3,25.$$

E em seguinte calcule

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10,5625.$$

A seguir

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3,0625$$

Portanto,

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 1,75.$$

Logo,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 3,25 + 1,75 = 5$$

$$\text{e } \left(\frac{x+y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy} = 3,25 - 1,75 = 1,5$$

São as soluções deste problema.

Simbolicamente, podemos traduzir esse modelo do escriba, para a linguagem algébrica, apresentando outro modelo para esse problema, seguindo os passos do escriba percebemos que

1º Passo: Tome a metade de p:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}$$

2º Passo: Faça o quadrado de $\frac{p}{2}$

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

3º Passo: Subtraia q do resultado

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

4º Passo: tire a raiz do resultado obtido

$$\left(\frac{x-y}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (2)$$

5º Passo: some o resultado obtido a $\frac{p}{2}$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2} = x$$

Onde acharemos uma das raízes da equação

Além disso podemos extrair valor de uma outra raiz, chamando de y, dado pela diferença de (2) pela metade de p, ou seja

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2}$$

Além disso note que podemos representar estas soluções através da seguinte forma:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} - \frac{p}{2} = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

que retoma a mesma solução demonstrada acima em (1).

Embora genial no método babilônico, o modelo apresentado era necessário, pois os mesmos não podiam resolver problemas do tipo $x^2 + px + q = 0$, pois, essencialmente, as constantes exigiam que fossem positivas, justamente pelo desconhecimento dos números negativos.

Em conformidade, Boyer (2012) mostra que as equações cúbicas também não eram um segredo para os matemáticos babilônicos, enquanto na civilização egípcia não há sequer um exemplo ou citação de um problema de terceiro grau, em algumas tábuas apresenta-se uma espécie de redução de grau de equações para resolução de equações cúbicas e biquadradas.

Ainda, de acordo com Boyer (2012, p. 45 e 46) além da tábua de argila que fornece uma lista de soluções de quadrados e de cubos inteiros no intervalo de 1 a 30, também foi achado uma tábua que apresentava soluções para valores de $n^3 + n^2$ dentro do mesmo intervalo de 1 a 30. Portanto é perceptível que os babilônios podiam resolver problemas da forma $x^3 + x^2 = b$, por meios destas tábuas.

2.3 – A Matemática na China.

A história das civilizações orientais possui um grau de maior dificuldade. Isso se dá pela falta de materiais arqueológicos e escritas que não conseguiram sobreviver a três aspectos importantes: o primeiro sendo as passadas dos impérios e dinastias, que por vezes destruíram obras significativas. Segundo aspecto, a preservação do material ao longo dos séculos, e terceiro aspecto, o compartilhamento das informações com outras civilizações.

A história da civilização chinesa pode ser dividida em quatro períodos principais: China Antiga (2000 a.C. - 600 a.C.), China Clássica (600 a.C. - 221 d.C.), China Imperial (221 d.C. - 1911 d.C.) e China Moderna (de 1911 d.C. até o presente).

De acordo com Eves (2011, p. 241) a civilização chinesa floresceu ao longo dos rios Yang-Tze e Howang Ho, logo após as civilizações egípcia e babilônica. No entanto, dispomos de poucas evidências históricas dessa era devido à natureza perecível dos materiais utilizados na escrita, como o bambu.

Consequentemente, apesar da escassez de material histórico, a maior parte dos registros encontrados que datam antes do período clássico, foram recriados a partir da memória de outros autores, o que suscita dúvidas sobre sua autenticidade. Portanto, nosso conhecimento sobre a matemática chinesa antiga é baseado em informações orais e interpretações posteriores dos textos originais.

De acordo com Boyer (2012, p. 144) em relação à matemática chinesa, o material mais importante e influente é o *Jiuzhang suanhu* (*Chui-chang suan-shu*) ou “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática”, datado do período do império Han (período clássico), século II d.C. Esse livro contém 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Nessa publicação aparecem soluções de sistemas lineares com duas e três incógnitas com números positivos e negativos.

Por consonância, Boyer (2012) admite que no livro de maior relevância chinesa antiga, a sua álgebra possui um nível bastante avançado.

Há problemas resolvidos pela regra de três; noutros são encontradas raízes quadradas e cúbicas. O Cap. 8 dos nove capítulos é significativo por conter a solução de problemas sobre equações lineares simultâneas, usando tanto números positivos quanto negativos. O último problema no capítulo envolve quatro equações em cinco incógnitas, e o tópico das equações indeterminadas continuaria a ser um dos preferidos entre os matemáticos orientais. (Boyer, 2012, p. 144)

A matemática chinesa é repleta de padrões numéricos, como por exemplo, o que é encontrado no quadrado mágico. De origem desconhecida, esse quadrado apresenta um padrão na posição dos números e foi apresentado pela primeira vez no livro dos Nove Capítulos com uma suposta lenda de que tal quadrado tenha aparecido nas costas de uma tartaruga no Rio Luo nos dias do lendário Imperador Yü.

Figura 5 — Quadrado mágico

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Boyer (2012, p. 144)

De acordo com Boyer (2012, p. 144) esta preocupação, possivelmente, tenha contribuído para a resolução de problemas de sistemas lineares, através do seguinte quadrado apresentado no livro.

Figura 6 — Problema do quadrado mágico

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Fonte: Boyer (2012, p. 144)

Efetuada operações aritméticas sobre colunas na matriz gerada pelo sistema, reduzimos o sistema de equações a uma forma mais simples, por exemplo:

Figura 7 — Redução do problema do quadrado mágico

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

Fonte: Boyer (2012, p. 144)

Desse modo podemos visualizar o quadrado descrito no livro como um sistema linear de forma:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Consequentemente, com a redução apresentada no segundo quadrado, as equações lineares são reduzidas para as seguintes equações $36z = 99$, $5y + z = 24$ e $3x + 2y + z = 39$, das quais facilmente são calculados os valores de z , y e x . Sendo $x = \frac{37}{4}$, $y = \frac{17}{4}$ e $z = \frac{11}{4}$.

De acordo com Boyer (2012) os chineses demonstraram conhecimento em operações com frações comuns, utilizando o máximo divisor comum (m.d.c.). Operavam com números negativos por meio de duas coleções de barras (vermelha para coeficientes positivos e preta para negativos), embora não considerassem números negativos como solução de equações. A matemática chinesa se destacava pela sua singularidade em relação a outras culturas da mesma época, desenvolvendo-se de maneira independente. No terceiro século, Lui Hui determinou um valor para Pi, utilizando inicialmente um polígono regular com 96 lados (3,14) e, posteriormente, um polígono regular com 3072 lados (3,14159).

2.4 – A sintetização da Matemática na Grécia.

Diferentemente das outras civilizações apresentadas, seu desenvolvimento se deu de forma totalmente diferente devido às mudanças socioculturais ocorridas na região. A história da civilização Grega parte de aproximadamente 1400 a.C., através das invasões de diferentes tipos de sociedades na região do mediterrâneo, onde estabeleceram uma nova sociedade fundida de culturas vindas dos vales da Mesopotâmia e Egito.

Um exemplo evidente da influência de outras culturas na formação da Grécia é a criação do seu alfabeto, que foi fortemente influenciado pelo alfabeto fenício, caracterizado por conter apenas consoantes. De acordo com Boyer (2012):

O alfabeto parece ter se originado entre os mundos babilônico e egípcio, talvez na região da Península do Sinai, por meio de um processo de redução drástica do número de símbolos cuneiformes ou hieráticos. (Boyer, 2012, p. 53)

A Grécia está localizada no sul do continente europeu, banhado pelos mares Jônico, Egeu, de Creta e Mediterrâneo. Entre esses mares, diversas colônias foram formadas, apontando para a de Creta como sendo o pilar do desenvolvimento da sociedade grega durante o período pré-helenístico, que originou o nome da população como helenos.

Comumente, alguns historiadores dividem a história da Grécia em 5 períodos: Período Pré-Homérico (2000-1100 a.C.), Período Homérico (1100-800 a.C.), Período Arcaico (800-500 a.C.), Período Clássico (500-338 a.C.) e Período Helenístico (338-136 a.C.) até a Grécia decair pela invasão dos macedônios, e ascender como protetorado romano.

2.4.1 - A sistematização da matemática.

No que se refere à matemática grega, embora os primeiros passos tenham sido influenciados por outras culturas, a Grécia absorve o conhecimento e parte para uma etapa mais especial. Conhecida também pelo formalismo da Matemática, os gregos se separam da questão prática, e indagam uma questão mais filosófica do “como” e “por que”.

Segundo Boyer (2012) muitos matemáticos foram importantíssimos na história da civilização grega e no formalismo da Matemática. Onde atribui-se a dois homens o início de toda a formação da matemática na Grécia, sendo eles: Tales de Mileto (c. 624 a. C. - 546 a.C.) e Pitágoras de Samos (c. 570 a.C. - 495 a.C.). Tales de Mileto foi difusor de um dos movimentos filosóficos mais importantes da época antiga, consolidando a escola Jônica enquanto Pitágoras de Samos, por sua vez, é fundador da Escola Pitagórica.

De acordo com Boyer (2012, p. 55), Tales de Mileto tentou através da matemática explicar o mundo natural sem recorrer a mitos, buscando causas racionais. Considerado também como pioneiro da geometria, ficou famoso pelo Teorema de Tales, relacionado à proporção de segmentos em retas paralelas. Tales é, frequentemente, saudado como o primeiro matemático, verdadeiro criador da organização dedutiva da geometria.

Pitágoras de Samos foi o fundador e líder da Escola Pitagórica, cujo foco era o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade, sua base de pensamento era dedicada ao *quadrivium*, que abrangia a geometria, a aritmética, a astronomia e a música. Os pitagóricos acreditavam que os números eram a base de toda a realidade, sendo não só ferramentas para contar como também a essência de todas as coisas. De acordo com Boyer (2012), aos pitagóricos, principalmente a Pitágoras, atribuem-se duas importantes descobertas: o conceito de número irracional, e as relações entre os lados de um triângulo retângulo (teorema de Pitágoras).

Outro momento importante da fundamentação lógica da matemática grega, tem base no período clássico, quando Hipócrates de Chio (c. 430 a.C.), anuncia os famosos problemas clássicos gregos: trissecção de um ângulo, duplicação do volume do cubo (problema délico) e quadratura do círculo. Iniciando com isso os estudos do princípio da indução e axiomatização da Matemática.

2.4.2 - As contribuições de Euclides de Alexandria.

Durante o período entre 350 a 200 a.C. com as campanhas de invasões de Alexandre, o Grande (356 - 323 a.C.), verifica-se um aumento nas transações comerciais culturais, e novamente, a influência das outras culturas, civilizações das orientais, acrescentam a matemática grega novas perspectivas. Entretanto, o foco muda para Alexandria, que passa a ser o centro cultural e econômico do mundo helenístico. Este é ponto de partida para muitos matemáticos que contribuíram de forma significativa para a matemática. Desse período destacamos Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.) e sua obra, Elementos, dividida em 13 volumes. Esse trabalho é repleto de postulados e conceitos fundamentais, não somente da Geometria, mas também, da Álgebra (embora a palavra álgebra ainda nem existisse). É nesta obra, em que os primeiros indícios de uma álgebra construída e formalizada, baseada em postulados, nos quais se provam verdades através de manipulações geométricas, entendidas sob um viés aritmético. Pois, embora a matemática esteja tomando passo evolutivo em sua construção partindo dos conceitos mais abstratos, os gregos precisam de uma demonstração geométrica realizada por régua e compasso. Segundo Eves (2011, p. 107).

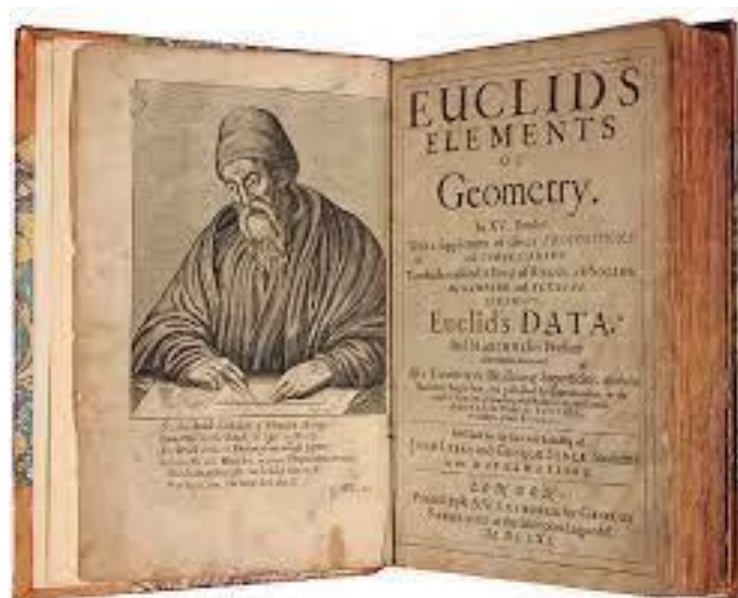
Imbuídos da ideia de representação de um número por meio de um comprimento e carecendo completamente de qualquer notação algébrica adequada, os gregos antigos idearam processos algébricos engenhosos para efetuar operações algébricas. Atribui-se aos pitagóricos parte considerável

dessa álgebra geométrica que se acha espalhada por vários dos primeiros livros dos Elementos de Euclides. (Eves, 2011, p. 107).

Por consequência, são essas proposições e postulados, que servirão como alicerce e fonte principal de sustentação para comprovação dos principais resultados na matemática Grega, não somente no tempo de Euclides, mas até os dias atuais.

A obra de Euclides evidencia as propriedades relativas às estruturas geométricas bidimensionais e tridimensionais, o desenvolvimento dos números inteiros e irracionais, segmentos comensuráveis e incommensuráveis, trigonometria, relações métricas entre triângulos e trabalhos intensivos sobre cônicas, como também as identidades algébricas.

Figura 8 — Livro os elementos de Euclides



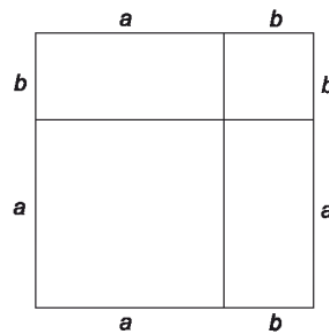
Fonte: Os Elementos de Euclides (afceducacao.com.br)

Segundo Eves (2011, p. 107), na Proposição 4, do Livro II dos Elementos, temos a seguinte proposição: Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes. Através do processo de decomposição de um quadrado de lado $a + b$ em dois retângulos de área ab e dois quadrados de áreas a^2 e b^2 , podemos entender esse problema da seguinte forma:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

E uma das representações geométricas da expressão acima, pode ser vista na figura a seguir.

Figura 9 — O quadrado da soma



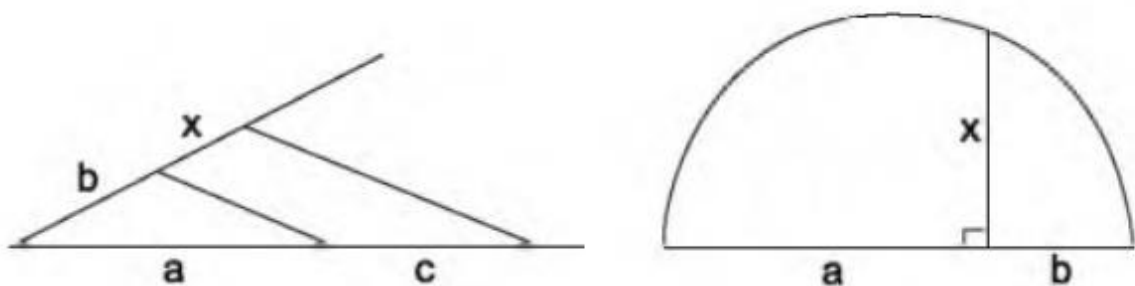
Fonte: Autor

Entre tantos trabalhos realizados pelos antigos geômetras gregos, o material deixado para soluções de equações do primeiro e segundo grau é de suma importância e beleza. Isso se dá pelo fato de sua demonstração de caráter visual, nos trazer uma nova alusão da atividade geométrica e aritmética à álgebra.

De acordo com Eves (2011, p. 110), os gregos desenvolveram dois métodos principais para resolução de equações simples, como o método das proporções e o método da aplicação de áreas. Segundo Eves, ambos os processos já eram conhecidos pelos pitagóricos, e alguns deles são apresentados na obra de Euclides como as proposições 44 do livro I, e nas proposições 28 e 29 do Livro VI.

Segundo Eves (2011, p. 110), o método das proporções, mostra de forma geométrica a construção de um segmento de reta x dado por $a : b = c : x$ (a esta para b , assim com c está para x) ou por $a : x = x : b$, em que a , b , c são segmentos de retas dados. Como apresentado na figura abaixo.

Figura 10 — Viés geométrico das equações para os gregos



Fonte: Eves (2011, p. 110)

Dessa forma o método das proporções fornece soluções geométricas de equações simples como $ax = bc$ e $x^2 = ab$. Além desses axiomas, conforme mencionado por Souza (2010, p. 80), os axiomas aritméticos de Euclides desempenham um papel fundamental na

resolução contemporânea de problemas de primeiro grau. Seus axiomas e propriedades são aplicados de forma direta para encontrar a raiz de uma equação por meio de procedimentos aritméticos aplicados em ambos os lados da equação. Conforme ressaltado por Souza (2010, p. 80), os principais axiomas são:

- a) Entidades iguais a uma terceira são iguais entre si, ou seja, se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$;
 - b) Se a iguais somam-se ou subtraem-se iguais, os resultados permanecem iguais, ou seja, se $a = b$, então $a + c = b + c$ ou $a - c = b - c$;
 - c) A parte é menor que o todo, ou, se $a > b$ e $b < c$, então $a > c$;
 - d) Iguais multiplicados ou divididos por iguais continuam iguais, ou o que equivale dizer matematicamente que, se $a = b$, então $ac = bc$ ou $a/c = b/c$.
- (Souza, 2010. p 80)

Ou seja, simbolicamente, para uma equação de grau 1, da forma $ax + b = c$, é suficiente mostrar que a solução é da forma $x = \frac{c-b}{a}$.

Embora genial toda formalização destes axiomas e proposições dos gregos para soluções de problemas que envolvam equações simples, de primeiro grau. O que talvez chame mais atenção, são os métodos utilizados para resolução de equações quadráticas. Veremos agora as soluções gregas para equações do segundo grau contidas nas proposições 28 e 29 do Livro VI de Euclides.

Proposição 28, Livro VI: Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada.

Para traduzir este problema, pense o seguinte: Seja AB um segmento de reta dado de comprimento p. Queremos dividir o segmento AB em duas partes de comprimento x e p-x de modo que o retângulo formado pelos dois segmentos (ou seja, o produto entre seus comprimentos) seja igual à área de um quadrado dado de lado q.

Em linguagem matemática, isso pode ser expresso como:

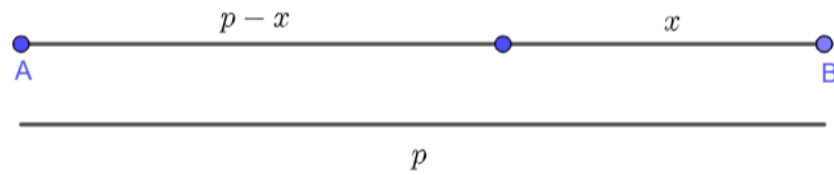
1º Condição: A condição do retângulo formado pelas partes, ou seja.

$$x(p - x) = q^2 \text{ ou}$$

$$xp - x^2 = q^2 \leftrightarrow x^2 - xp + q^2 = 0$$

ou geometricamente forma pela construção abaixo.

Figura 11 — Divisão do segmento de reta



Fonte: Autor

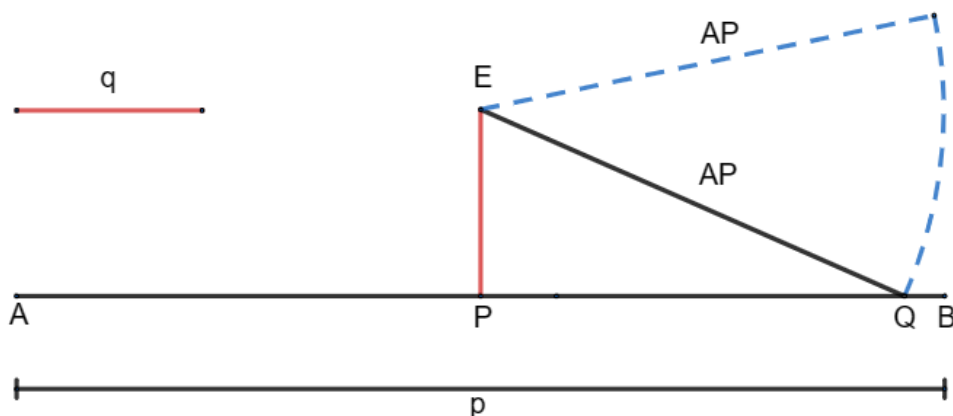
2º Condição: A condição de que o quadrado dado não exceda o quadrado sobre metade do segmento. Ou seja

$$q^2 \leq \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Estas duas equações expressam matematicamente as condições descritas no problema. Em linguagem atual, este tipo equivale a resolver uma equação da forma: $x^2 - px + q^2 = 0$. Em que p e q são segmentos dados. Geometricamente, podemos traduzir essa proposição para o seguinte:

Resolução: Seja AB e PE dois segmentos de retas tais que $AB = p$ e $PE = q$, onde P é ponto médio do segmento de reta AB, e $q < \frac{p}{2}$, sendo PE perpendicular a AB. Como na figura abaixo.

Figura 12 — Solução do problema 28 do livro VI de Euclides



Fonte: Autor

Tome o ponto Q sobre AB de forma que QE seja raio de uma circunferência de centro E e raio AP, sendo $AP = QE$ de modo que $AQ + QB = p$ e $AQ \cdot QB = q^2$, facilmente provado pelo teorema de Pitágoras, já demonstrado pelos gregos, ou seja:

Note que pelo Teorema de Pitágoras no triângulo EPQ, temos que

$$(EP)^2 + (PQ)^2 = (EQ)^2$$

Como EP = q, reescrevendo PQ = (PB - QB), temos que

$$(q)^2 + (PB - QB)^2 = (EQ)^2$$

Aplicando o produto notável em (PB - QB), temos que

$$(q)^2 + (PB)^2 - 2PB \cdot QB + (QB)^2 = (EQ)^2$$

Como PB = EQ = AP, temos que

$$(q)^2 - 2PB \cdot QB + (QB)^2 = 0$$

Evidenciando o seguimento QB, temos

$$(q)^2 - QB(2PB - QB) = 0$$

Como 2PB - QB = AQ, temos por fim que

$$q^2 = QB \cdot AQ$$

Assim, denotando a primeira solução da raiz por $r = QB$ e a segunda raiz por $s = AQ$, termos as soluções procuradas. De forma geral, as soluções para equações do tipo $x^2 - px + q^2 = 0$, são da forma:

$$p = r + s \text{ e } q^2 = r \cdot s$$

Na proposição 29, Livro VI, encontra-se o seguinte problema: Prolongue um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado.

Dessa forma, seja AB um segmento de reta dado, de tamanho p , e x o comprimento da extensão que deve ser feita no segmento AB . A condição do problema afirma que o retângulo contido pelo segmento estendido $(AB + x)$ e a extensão x é igual a um quadrado dado de lado q .

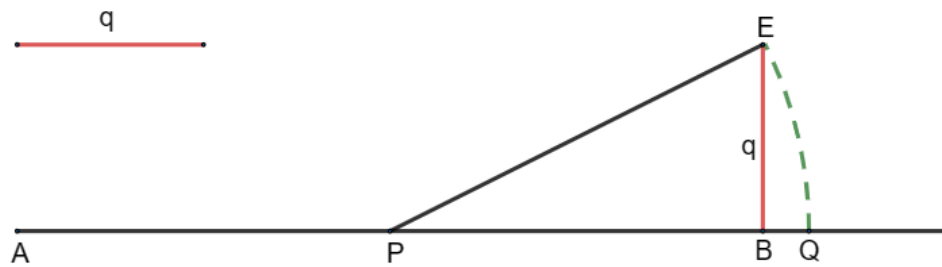
Em linguagem matemática, essa condição pode ser expressa da seguinte forma:

$$(AB + x) \cdot x = q^2$$

Simbolicamente podemos traduzir isso para equação $x^2 - px - q^2$. Em que p e q são segmentos dados.

Geometricamente, podemos traduzir essa proposição para o seguinte:

Figura 13 — Solução do problema 29 do livro VI de Euclides



Fonte: Autor

Resolução: Seja AB e BE dois segmentos de retas tais que $AB = p$ e $BE = q$, onde P é ponto médio do segmento AB.

Determina-se o ponto Q, tal que Q é ponto dado pela projeção do segmento PE sobre AB, através do arco de uma circunferência de centro P e raio PE, tal que $PE = PQ$.

Note que pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$q^2 + PB^2 = PE^2$$

como $PE = PQ$, segue que $q^2 + PB^2 = PQ^2$, assim temos que

$$q^2 = PQ^2 - PB^2 = (PQ - PB) \cdot (PQ + PB) = QB(PQ + PA) = QB \cdot AQ$$

Desta forma, considerando $r = AQ$ e $s = QB$, temos que

$p = r - s$ e $-q^2 = r \cdot (-s) = -rs = -AQ \cdot QB$ assim sendo r e s as raízes da equação dada.

Outros nomes são de extrema importância para a evolução da matemática Grega, até seu declínio. Como por exemplo, Arquimedes (287 – 212 a.C.), Apolônio de Perga (247-205 a.C.), Ptolomeu (150 d.C.), Nicómaco de Gerasa (60 d.C. - 120 d.C.) e por último, Diofanto de Alexandria (214 d.C. - 298 d.C.). De acordo com Boyer (2012, p. 133)

No começo desse período, também chamado Segunda Idade Alexandrina, encontramos o maior algebrista grego, Diofante de Alexandria, e, perto do fim desse período, apareceu o último geômetra grego importante, Papus de Alexandria. Nenhuma outra cidade foi o centro da atividade matemática por tanto tempo quanto Alexandria, dos dias de Euclides (cerca de 300 a.C.) aos de Hipátia (415 d.C.) (Boyer, 2012, p. 133).

2.4.3 – As contribuições de Diofanto de Alexandria.

Pouco sabemos sobre a vida de Diofanto de Alexandria, não existe certeza da época em que o matemático viveu e sobre sua nacionalidade. Embora alguns historiadores tendem a relacionar sua existência durante o século III. Apesar da pouca referência a Diofanto em textos

antigos, existe um enigma na coleção de problemas chamada Antologia Grega², que discute a sua idade, afirmando que ele viveu até os oitenta e quatro anos.

De acordo com Eves (2011), Diofanto escreveu três trabalhos, sendo “Aritmética”, o mais importante, onde seis dos treze livros ou capítulos restaram. De acordo com Eves (2011).

A Aritmética é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. A parte remanescente do trabalho se dedica à resolução de 130 problemas, numa variedade considerável, que levam a equações do primeiro e do segundo graus. Só uma cúbica muito particular é resolvida. O primeiro livro se ocupa de equações determinadas em uma incógnita e as demais de equações indeterminadas de segundo grau, e às vezes de grau maior, em duas ou três incógnitas. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos ideados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números racionais positivos e, na maioria dos casos, satisfazia-se com uma resposta apenas do problema. (Eves, 2011, p. 207).

Boyer (2012, p. 134) assume que o desenvolvimento da álgebra tenha se dado por três estágios: o primeiro, primitivo ou retórico, em que tudo é completamente escrito em palavras; segundo um estágio intermediário ou sincopado, em que são adotadas algumas abreviações; e por final um estágio simbólico. É neste estágio simbólico que Diofanto recebe seu crédito, ao abreviar em sua obra algumas notações para equações.

Ainda conforme Boyer (2012, p. 134), na “Aritmética” de Diofanto, não veremos uma formulação geral para esses problemas. Temos apenas algumas soluções específicas para esses problemas desenvolvidas por suas análises. Para ele, estudar as infinitas possibilidades de soluções de uma equação determinada ou indeterminada, não era necessário, mas, apenas encontrar uma solução que satisfizesse o problema.

Atualmente, chamamos de equações diofantinas, as que possuem formato igual a: $ax + by = c$, onde a, b e c são conhecidos e x e y são desconhecidos. Em alguns casos, Diofanto resolveu equações da forma: $ax^2 + by^2 = c$. Por fim, a respeito das equações indeterminadas, alguns problemas como $x^2 = 1 + 30y^2$ e $x^2 = 1 + 26y^2$, aparece na “Aritmética” com soluções particulares e específicas para esses casos. Atualmente, esses problemas da forma $x^2 = 1 + py^2$ são chamados de equações de Pell.

² Compilado ou coletânea de poemas que foi sendo compilada e ampliada por diversos autores ao longo de séculos.

3. O desenvolvimento das equações no período medieval

O processo de evolução matemática, nesse período, deu-se de forma bastante lenta. Durante centenas de anos, o processo retórico instrutivo, era o único meio de se registrar, e transmitir os métodos e soluções que tinham sido obtidas. A evolução desse processo retórico tem como consequência a criação do método de abreviações, chamado de álgebra sincopada que seria utilizado durante toda a idade média.

O início da Idade Média é frequentemente associado à queda do Império Romano diante dos invasores bárbaros em 476. Esse período, também conhecido como idade das trevas, duraria até a queda de Constantinopla em 1543. Todavia, apesar de ser marcada por guerras e invasões, epidemias, fome e miséria e conflitos religiosos, é também, um período em que a ciência começa, mesmo que lentamente a ser desenvolvida e, também marca o início do conhecimento científico socializado em escolas físicas que se transformariam nas universidades atuais.

É nesse período que o intercâmbio cultural cresce exponencialmente atingindo grande parte das maiores civilizações mundiais. Esse fato irá culminar com a aparição de grandes instituições científicas, que se transformaram em centros de pesquisa e avanço científico. Consequentemente, a matemática também terá seu lugar de destaque e a álgebra como a conhecemos começa a ser sistematizada.

3.1 - China nos tempos medievais

Iniciaremos falando novamente sobre a China, pois durante muitos anos, o livro de maior importância no âmbito da matemática na China se baseou na obra dos “Nove Capítulos sobre Arte Matemática”. As mudanças políticas ocorridas no período das dinastias foram muito cruéis para os avanços científicos, e por centenas de anos impactaram de forma negativa na produção de novos matemáticos. Mesmo após a queda do Império Romano, a China permaneceu isolada e a transição de conhecimento sobre a matemática oriental quase não existia.

Durante o período imperial (221 - 1911), a China enfrentou diversas lutas internas, marcadas pela queda da dinastia Han (206- 220) que resultaram em conflitos entre senhores regionais em busca de domínio. Em 618 d.C., a dinastia Tang (618 - 907) unificou a China, seguida pelas dinastias Sung (960 - 1279) e Yuan (1279 - 1368). Estas últimas promoveram as artes e a literatura, dando origem a uma era de ouro que elevou a China a grandes dimensões e influência. O comércio chinês começou a se abrir para a Europa através do Oriente Médio, com

as viagens de Marco Pólo (1254 - 1324) à corte de Kublai Khan (1215 - 1294) marcando o primeiro contato da civilização chinesa com o mercado europeu.

O império chinês perdurou por um período muito mais extenso que o romano, só sendo interrompido pela revolução de 1911. É relevante destacar que, ao contrário do Império Romano, os imperadores chineses, especialmente Kublai Khan, contribuíram significativamente para uma cultura rica e uma base intelectual sólida. Devido ao maior interesse dos chineses em literatura e arte. A matemática acabou sofrendo um atraso em comparação com outras ciências.

Entretanto, por volta de 1303, Chu Shih-chieh (1271 - 1368) demonstrou em sua obra *Ssu-yüan yü-chien*, que significa “Precioso espelho dos quatro elementos”, uma técnica para resolver equações polinomiais de segundo grau. Essa abordagem, denominada método *fan* ou *fan-fan*, baseava-se em aproximações sucessivas. O método foi apresentado de maneira eloquente e precisa, revelando uma única raiz positiva para a equação. Um exemplo prático deste método *fan-fan* pode ser observado no artigo de Fragoso (2000, p. 23), quando sugere: queremos solucionar a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$ (1), para isto tome (1) da seguinte forma:

$$x^2 + 252x = 5292 \quad (2)$$

note que se utilizarmos $x_1 = 19$ em (2), obtemos $5149 = 5292$. Ou seja, o valor tomado é uma aproximação daquilo que buscamos. Logo, a raiz da equação é um valor entre 19 e 20. assim vamos tomar x_1 como sendo

$$x_1 = 19 + x$$

onde $x_1 = 19 + x$, é o valor obtido por aproximação mais um decimal.

Agora substituindo x_1 em (2), obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned} (x + 19)^2 + 252(x + 19) &= 5292 \\ x^2 + 38x + 361 + 252x + 4788 &= 5292 \\ x^2 + 290x &= 143 \text{ cuja solução está entre 0 e 1.} \end{aligned}$$

Assim, se obtinha

$$x_1 = 19 + \frac{143}{1 + 290} = 19,49$$

E assim, a ideia é repetir esse processo até que a aparecesse um número cujo valor não se modifique (convergência), por exemplo

$$\begin{aligned} x_2 &= 19,49 + x \\ x^2 + 252x &= 5292 \quad (3), \text{ substituindo } x_2 \text{ em (3), obtemos} \\ (19,49 + x)^2 + 252(19,49 + x) &= 5292 \end{aligned}$$

$$x^2 + 290,98x = 0,66$$

$$x_2 = 19,49 + \frac{0,66}{1 + 290,98}$$

$$x_2 = 19,49, \text{ é o nosso valor convergente}$$

Portanto $x_2 = 19,49$ é o valor aproximado de uma das raízes da equação.

Em 1819, o matemático inglês William George Horner (1786 - 1837) reivindica a descoberta do método *fan-fan*, e o renomeia como método de *Horner*.

3.2 - A evolução algébrica na Índia.

Entre, aproximadamente, 450 d.C. e o final do século XV, a Índia foi palco de inúmeras invasões estrangeiras, iniciando com os hunos, seguidos pelos árabes no século VIII e pelos persas no século XI. Nesse período, destacaram-se diversos matemáticos hindus, dentre outros: Aryabhata I (476–550), Aryabhata II (c. 920–1000), Brahmagupta (598–668), Mahāvīra (c. 800–870) e Bhaskara (1114–1185).

Àryabhata I nasceu nas proximidades da atual Patna, próxima ao rio Ganges. Ele é autor do livro de astronomia intitulado *Āryabhatīya*, uma obra concisa escrita em verso, abordando temas de astronomia e matemática. Embora famosa, apenas parte de sua obra foi preservada, restando só alguns fragmentos. Nesse sentido, a situação do *Aryabhatīya* de Aryabhata na Índia assemelha-se à posição de "Os Elementos" de Euclides na Grécia, visto que ambas as obras se configuram como fundamentais, pois, mesmo fragmentados, exercem notória e duradoura influência sobre o pensamento científico.

De acordo com Boyer (2012), Brahmagupta foi um eminente matemático hindu do século VII, viveu e trabalhou no centro astronômico de Ujjain, na Índia Central. Em 628, ele escreveu *BrahmaJphuta-Jidd'bānta*, uma obra de astronomia composta por 21 capítulos, sendo o 12º e o 18º dedicados à matemática. Mahāvīra, escreveu o *Gaṇitasāraśaṅgraha*, um texto que sistematizou o conhecimento matemático de sua época, com ênfase em problemas de matemática elementar.

Segundo Boyer (2012), Brahmagupta foi possivelmente o primeiro a apresentar uma solução geral para a equação linear $ax + by = c$, onde a , b e c são inteiros. Ele destacou a condição de que o máximo divisor comum de a e b deve dividir c para que a equação tenha soluções inteiras. Quando a e b são primos entre si, Brahmagupta forneceu soluções específicas para x e y , expressas como $x = p + mb$ e $y = q - ma$, onde m é um inteiro arbitrário.

Bhaskara, também residente em Ujjain, proeminente matemático do século XII, desempenhou um papel essencial ao preencher lacunas na obra de Brahmagupta. Ele forneceu uma solução abrangente para as equações que chamamos atualmente de Diofantinas, e abordou a questão da divisão por zero, não explorada na matemática grega. Enquanto Aristóteles havia observado a ausência de uma razão para que um número como quatro superasse zero, a aritmética do zero não fazia parte da matemática grega, e Brahmagupta não abordou a divisão por zero. Assim, é na *Vija-Ganita* de Bhaskara que encontramos a primeira afirmação de que tal quociente é infinito.

Bhaskara foi o último matemático medieval significativo na Índia, e sua obra representa o apogeu das contribuições hindus anteriores. Seu tratado mais conhecido, *Lilavati*, dedicado à sua filha, abrange vários tratados voltados para álgebra e aritmética. Após Bhaskara, a evolução da matemática hindu foi caracterizada por progressos irregulares até os tempos modernos³.

Conforme destacado por Howard Eves (2011), os hindus demonstraram habilidades notáveis em aritmética e ofereceram contribuições significativas para a álgebra. O método do retorno, abordando os problemas aritméticos do final para o início, foi frequentemente empregado para encontrar soluções.

Vejamos, por exemplo, o seguinte problema que faz parte do texto *Lilavati* de Bhaskara, descrito no livro de Eves:

Linda donzela de olhos resplandecentes, uma vez que entendeis o método de inversão correto, dizei-me qual é o número que multiplicado por 3, depois acrescido de $3/4$ do produto, depois dividido por 7, diminuído de $1/3$ do quociente, multiplicado por si mesmo, diminuído de 52, pela extração da raiz quadrada, adição de 8 e divisão por 10 resulta no número 2?. (Eves, 2011, p. 255).

De acordo com Eves (2011, p. 255) Pelo método de inversão, iniciamos com o número 2 e realizamos operações retroativas. Dessa forma:

$$[2 \cdot 10 - 8]^2 + 52 = 196$$

por sua vez $\sqrt{196} = 14$, assim

$$(14 \cdot (3/2) \cdot 7 \cdot (4/7))/3 = 28$$

que é a resposta.

³ A Sociedade Matemática Indiana foi estabelecida em 1907, e dois anos depois, em Madras, surgiu o *Journal of the Indian Mathematical Society*. A revista de estatística indiana, chamada *Sankhyā*, começou a ser publicada em 1933. Destaca-se como um dos mais notáveis matemáticos indianos dos tempos modernos o amanuense pobre e gênio autodidata, Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Possuindo uma extraordinária capacidade para perceber de maneira rápida e profunda intrincadas relações numéricas, Ramanujan foi descoberto em 1913 pelo eminente especialista em teoria dos números, G. H. Hardy (1877-1947). Os esforços de Hardy possibilitaram que Ramanujan estudasse na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, no ano seguinte.

Na notação atual, podemos reescrever esse problema da seguinte forma:

Seja um número a ser encontrado, ou seja, x . Multiplicado por 3, ou seja, $3x$.

Acrescido de $\frac{3}{4}$ do produto, ou seja $3x + \frac{3}{4} \cdot 3x \Leftrightarrow 3x + \frac{9x}{4}$

Dividido por 7, assim, $\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7}$

Diminuído de $\frac{1}{3}$ do quociente, ou seja, $\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7}$

Multiplicado por si mesmo, assim $\left(\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \right)^2$

Diminuído de 52, assim, $\left(\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \right)^2 - 52$

Extraindo a raiz quadrada, temos que, $\sqrt{\left(\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \right)^2 - 52}$

Adicionando 8, temos, $\sqrt{\left(\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \right)^2 - 52} + 8$

E dividindo por 10 temos que isso resulta em 2, assim $\frac{\sqrt{\left(\frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3x + \frac{9x}{4}}{7} \right)^2 - 52} + 8}{10} = 2$

Para Eves (2011, p. 255), o método da inversão é bem simples, pois quando o problema indica divisão por 10, realizamos a multiplicação por 10; quando instrui a soma de 8, efetuamos a subtração de 8; e quando pede a extração da raiz quadrada, elevamos ao quadrado, e assim por diante. O termo inversão refere-se à substituição de cada operação pela sua operação inversa. Essa abordagem é exatamente o que faríamos ao resolver o problema utilizando métodos modernos. Dessa forma, ao representar o número procurado por x , da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{(2/3) \cdot (7/4)(3x)}{7} \right]^2 - 52} + 8}{10} = 2$$

S'ridhara (870 - 930), por volta de 1025, parece ter sido o primeiro a enunciar a denominada regra hindu para a resolução de equações quadráticas. Vejamos o que diz Roque (2012):

Multiplica-se ambos os membros por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados; e, em seguida, adiciona-se a quantidade igual ao quadrado do número original de quantidades desconhecidas simples. (Roque, 2012, p. 240)

Em notação atual, podemos traduzir esse problema da seguinte forma:

Tome uma equação do segundo grau na forma:

$$ax^2 + bx = c$$

multiplicando ambos os lados por $4a$ obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

somando em ambos os lados b^2 (quadrado do valor desconhecido) temos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$$

desta forma:

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$$

tomando a raiz em ambos os lados, temos:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

Segundo Eves (2011, p. 256), os hindus simplificaram sua álgebra, utilizando notações concisas. Adotaram a justaposição para indicar adição, um ponto sobre o subtraendo para subtração, a palavra “*bha*” após os fatores para representar multiplicação, colocando o divisor abaixo do dividendo para indicar divisão, e inserindo “*ka*” antes da quantidade para representar a raiz quadrada. Brahmagupta usava “*p*” para a incógnita e “*rü*” para os inteiros conhecidos. Incógnitas adicionais eram representadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressavam diferentes cores, como “*kã*” para uma segunda incógnita. Assim, uma expressão como $8xy + \sqrt{10} - 7$ poderia ser escrita como *yã kã 8bha ka 10 rü 7*.

Ainda Eves (2011, p. 256), diz que, os hindus reconheciam a existência de números negativos e irracionais, e compreendiam que uma equação quadrática (com soluções reais) possui duas raízes formais. Eles consolidaram a resolução algébrica de equações quadráticas através do método de completar de quadrados bastante utilizado pelos Árabes, que hoje frequentemente é chamado de método hindu.

3.3 - Avanço Islâmico

A península Arábica, ou simplesmente Arábia, está localizada no sudoeste da Ásia e no nordeste da África. Historicamente, suas conquistas se estenderam por grande parte da Ásia, estabelecendo uma significativa hegemonia islâmica.

Uma das mudanças mais impactantes que influenciaram a matemática durante a Idade Média foi a notável expansão do Islã. Em apenas um século, a partir de 622 d.C., o ano da Hégira, a fuga do profeta Maomé para Medina, o Islã se estendeu da Arábia até a Pérsia, conquistou o norte da África e a península Ibérica.

No final do século VI, a Arábia passava por uma crise séria após a queda do Império Sabeano. Habitada principalmente por nômades beduínos, a península encontrava-se sob forte turbulência política e social. Influenciado por suas interações com judeus e cristãos durante suas viagens, Maomé tornou-se um líder religioso e militar. A Hégira, sua mudança para Medina em 622, marcou o início da era maometana.

Após a morte de Maomé em 632, seus seguidores expandiram rapidamente o domínio islâmico, conquistando territórios como Damasco, Jerusalém e a Mesopotâmia. Em 641, Alexandria, foi conquistada, e sua biblioteca, um tesouro intelectual, teve suas obras confiscadas, sendo posteriormente levadas a Arábia e traduzidas.

Em, aproximadamente 750, os árabes demonstraram certa disposição para absorver a cultura das civilizações que haviam subjugado. Por volta da década de 770, uma obra que trata de astronomia e matemática chamada *Sindhind*, foi trazida da Índia para Bagdá. Posteriormente, em cerca de 775, essa obra seria traduzida para o árabe. Por volta de 780, o Tetrabiblos astrológico de Ptolomeu (90 d.C. - 168 d.C.) também seria traduzido do grego para o árabe. O interesse inicial dos árabes por alquimia e astrologia foram dois fatores que estimularam a absorção acelerada da cultura dos povos conquistados. Desta forma, a expansão Islâmica não reside apenas na rápida formação do império político, mas também na ciência e cultura dos povos conquistados.

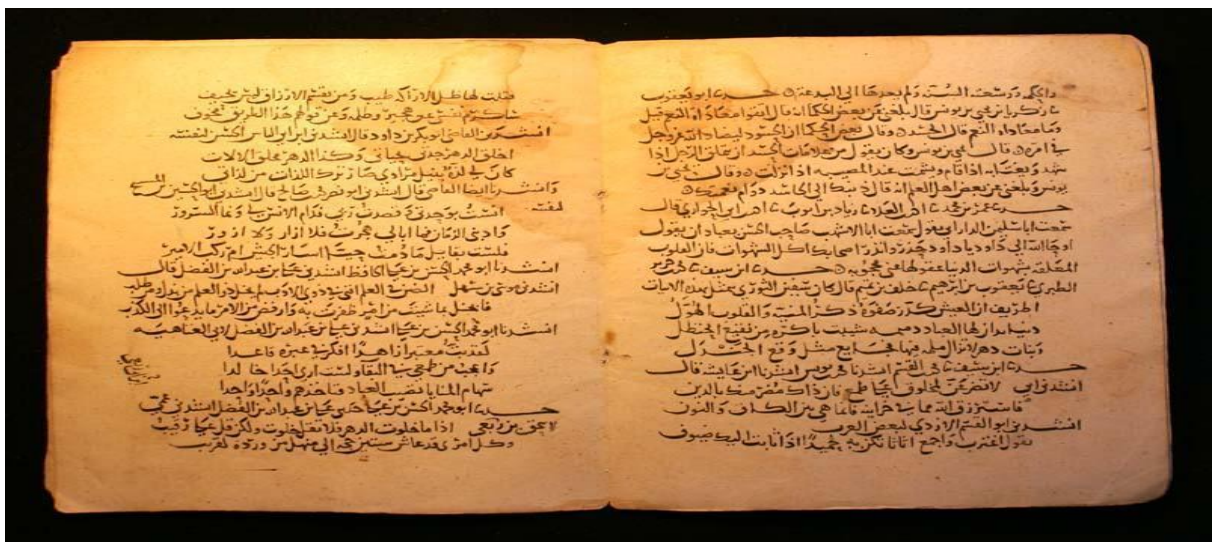
No primeiro século do Império Muçulmano (cerca de 650 a 750), os árabes estiveram preocupados com a consolidação do império, o que conseqüentemente, levaria a uma ausência notável de realizações científicas. Contudo, o Islã na segunda metade do século oitavo, vivenciam um renascimento cultural, impulsionado pelos califas da dinastia abássida: Al-Mansur (714–775), Harum al-Rachid (763–809) e Al-Mamum (786–833). Durante o califado de Al-Mamum, os árabes intensificaram os esforços de tradução, abrangendo obras gregas, persas e sânscritas, incluindo o *Almagesto* de Ptolomeu e “Os elementos” de Euclides.

No século VIII o califa Harum al-Rachid funda em Bagdá a Casa da Sabedoria, uma instituição comparável à Biblioteca de Alexandria. Essa instituição iria atingir seu auge no

reinado do seu filho Al-Mamum, cujo é o responsável por ter atraído muitos eruditos de diversas nações com o objetivo de tornar a Casa da Sabedoria o maior centro do conhecimento da época, objetivo que seria atingido entre os séculos IX e XIII. Para isso, fazia-se necessário, desde o início, as traduções das obras confiscadas nas invasões para a língua Árabe. Inicialmente, do persa para o árabe, e posteriormente, do sânscrito e grego.

Desta forma, conseguiu acumular também uma coleção de manuscritos antigos, principalmente de fontes bizantinas, e mais tarde construíram um observatório astronômico. Desse período destaca-se, dentre outros, Mohammed ib Musa al-Khwarizmi (c. 780–c. 850), cujo nome se tornaria conhecido na Europa Ocidental, os irmãos Banu Musa (século IX), Al Kindi (c. 801–873) e Thabit ibn Qurra (c. 826–901). Mas, com o declínio do Império Árabe os mongóis invadem Bagdá e destroem a biblioteca da Casa da Sabedoria.

Figura 14 — Manuscrito da época do Califado Abássida



Fonte: WikiWand

Segundo Boyer (2012, p. 173) a história da matemática Árabe pode ser dividida em quatro partes, sendo assim;

A matemática árabe pode, de modo bem adequado, ser dividida em quatro partes: (1) uma aritmética, derivada presumivelmente da Índia e baseada no princípio posicional; (2) uma álgebra que, embora viesse de fontes gregas, hindus e babilônicas, tomou nas mãos dos muçulmanos uma forma caracteristicamente nova e sistemática; (3) uma trigonometria cuja substância vinha principalmente da Grécia, mas à qual os árabes aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas; e (4) uma geometria que vinha da Grécia, mas para a qual os árabes contribuíram com generalizações aqui e ali. (Boyer, 2012, p. 173).

Na atualidade, o desenvolvimento do que agora denominamos álgebra deve-se aos matemáticos árabes, com especial destaque para al-Khwarizmi. A ele é creditada a construção da base numérica que se tornaria fundamental para as gerações futuras.

Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi foi autor de diversas obras em astronomia e matemática, algumas baseadas nos *Sindhind*. Suas contribuições incluem tabelas astronômicas, tratados sobre o astrolábio, o relógio de sol e dois livros sobre aritmética e álgebra. Do livro, intitulado *De numero indorum* (Sobre a arte hindu de calcular), sobrevive apenas em uma tradução latina, onde a versão árabe original foi perdida.

Figura 15 — Al-Khwarizmi (c.780 a 850 d.C.)



Fonte: Wikipedia (Álgebra)

Nessa obra, al-Khwarizmi forneceu uma exposição abrangente dos numerais hindus. Embora não reivindicasse originalidade, suas traduções latinas na Europa levaram a atribuições equivocadas da autoria e à falsa impressão de que o sistema numérico era de origem árabe. Segundo Boyer (2012), a notação passou a ser conhecida como algorismi ou algarismo em sua homenagem. Também, a palavra algoritmo torna-se um termo geral para regras especiais de processos ou operações matemáticas.

Al-Khowarizmi introduziu um método brilhante para demonstrar geometricamente quando um número positivo é a raiz de uma equação do 2º grau. Esse procedimento geométrico, diferente dos métodos gregos, posteriormente tornou-se conhecido como o Método de Completar Quadrados.

Da obra mais importante de al-Khwarizmi, intitulada *Hisob al-jabr wa'l muqabalah* (Livro da restauração ou balanceamento) destaca-se a palavra *al-jabr* (restauração), que origina o termo que hoje conhecemos por Álgebra.

Embora al-Khwarizmi, assim como outros estudiosos árabes não tenham utilizado sincopação ou números negativos, seu *Al-jabr* está mais próximo da álgebra elementar moderna do que as obras de Diofante e Brahmagupta. O livro apresenta uma abordagem direta e elementar na resolução de equações, especialmente de segundo grau. Os árabes valorizavam uma apresentação clara e organizada, diferentemente de Diofante e dos hindus, que se destacavam em associação e analogias, intuição e imaginação artística.

A palavra *al-jabr* sugere restauração ou completação, referindo-se à transposição de termos de um lado para o outro lado da igualdade de uma equação. A palavra *muqabalah* refere-se à redução ou equilíbrio, indicando o cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação. Curiosamente, a influência árabe pode ser encontrada em Dom Quixote, onde a palavra algebrista é usada para descrever um restaurador de ossos.

A Álgebra (*al-jabr*) de al-Khwarizmi começa com uma breve introdução ao princípio posicional para números e, em seguida, avança para a resolução de seis tipos de equações formadas com três espécies de termos em seis capítulos curtos. Conforme Rufino (2013) destaca, examinaremos as formas que al-Khwarizmi utilizava para resolver esses problemas.

Equações	Tipos	Forma resolutiva
1º tipo	Quadrados iguais a raízes	$ax^2 = bx$
2º tipo	Quadrados iguais a números	$ax^2 = c$
3º tipo	Raízes iguais a números.	$ax = b$
4º tipo	Raízes e quadrados iguais a números;	$x^2 = sx - p$
5º tipo	Quadrados e números iguais a raízes;	$x^2 + p = sx$
6º tipo	Raízes e números iguais a quadrados.	$x^2 = sx + p$

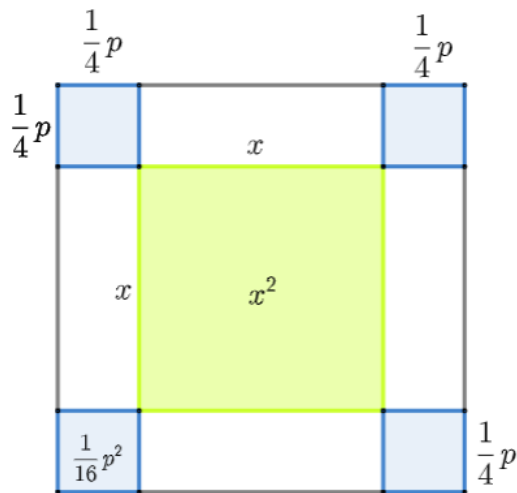
De acordo com Morgado (1999), Al-Khowarizmi desenvolveu dois métodos para determinar a solução positiva da equação, sendo eles:

1º Método: Para equações do tipo $x^2 + px = q$

Constrói-se um quadrado de lado x e, sobre esse lado, para o exterior do quadrado, constrói-se um retângulo de lados x e $\frac{1}{4}p$.

Completa-se o quadrado abaixo, construindo em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{1}{4}p$.

Figura 16 — 1º forma de completar quadrados



Fonte: Autor

Então a área do quadrado maior formado por cinco quadrados e quatro retângulos é:

$$x^2 + 4\frac{1}{4}px + 4\frac{1}{16}p^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$$

Dado a equação $x^2 + px = q$, somando $\frac{1}{4}p^2$ em ambos os lados, obtemos:

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$$

com isto, podemos reduzir para o quadrado

$$(x + \frac{1}{4}p)^2 = q + \frac{1}{4}p^2$$

retirando a raiz em ambos os lados, obtemos

$$x + \frac{1}{4}p = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$$

subtraindo $\frac{1}{4}p$ em ambos os lados obtemos que a raiz é dada por

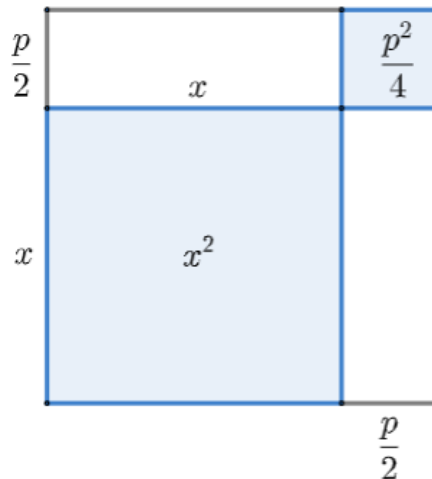
$$x = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} - \frac{1}{4}p$$

Note que, somente era admitido a solução positiva.

2º Método: Para equações do tipo $x^2 + px = q$

Constrói-se um quadrado de lado x e, sobre esse lado, estende-se para o exterior do quadrado um segmento de tamanho $\frac{p}{2}$, assim, se constrói um quadrado de lado $x + \frac{p}{2}$. Como na figura abaixo.

Figura 17 — 2º forma de completar quadrados



Fonte: Autor

Então a área do quadrado maior será $x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$

Dado a equação $x^2 + px = q$, somando $\frac{p^2}{4}$ em ambos os lados, obtemos

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

com isto, podemos reduzir para o quadrado

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4}$$

retirando a raiz em ambos os lados obtemos

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}$$

subtraindo $\frac{p}{2}$ em ambos os lados obtemos que a raiz é dada por

$$x = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}.$$

Note que, somente era admitido a solução positiva.

Por curiosidade o método de completar quadrados deriva a fórmula resolutive que hoje chamamos de Fórmula de Bhaskara.

Iezzi (1993, p 140-1), renomado escritor brasileiro de livros didáticos de matemática, apresenta uma demonstração da resolução da equação do segundo grau da seguinte forma: dada a equação do segundo grau completa $ax^2 + bx + c = 0$ tal que $a \neq 0$, façamos as seguintes manipulações:

Divida ambos os lados por a , obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Some

$$0 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2},$$

no primeiro membro, obtendo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Somando $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ em ambos os lados obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Transformando o primeiro membro em um quadrado obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Retire a raiz em ambos os lados

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Somando $-\frac{b}{2a}$ em ambos os lados, obtemos:

$$x = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

Que resulta na forma resolutive:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Outros matemáticos, além de Al-Khowarizmi, desempenharam papéis significativos no desenvolvimento da álgebra, como Abu'l-Wefa (940–998) e seu discípulo Al-Karkhi (c. 953–1029), que abordou de maneira sistemática as equações diofantinas indeterminadas.

Abu'l-Wefa era hábil em álgebra, além de ser um especialista em trigonometria. Ele comentou sobre a Álgebra de Al-Khwarizmi e traduziu do grego um dos últimos grandes clássicos, a *Arithmetica* de Diofante. Seu sucessor, Al-Karkhi, evidentemente utilizou essa tradução para se tornar um admirador árabe de Diofante, embora não tenha se dedicado à análise diofantina. Ou seja, Al-Karkhi estava interessado na álgebra de Al-Khwarizmi, não na análise indeterminada dos hindus.

Segundo Boyer (2012), Al-Karkhi, ao contrário de Al-Khwarizmi, não se limitou a equações quadráticas, embora tenha seguido a prática árabe de fornecer demonstrações geométricas para equações quadráticas. Em particular, a Al-Karkhi é creditada a primeira solução numérica de equações da forma $ax^{2n} + bx^n = c$ (considerando apenas raízes positivas), abandonando a restrição diofantina a números racionais. Foi nessa direção, a busca por soluções algébricas (em termos de radicais) para equações de grau superior a dois.

No que tange às equações de grau superior a dois, exceto Al-Karkhi, temos por volta do século XII o “fabricante de tendas”, Omar Khayyam (c. 1050-1122). Omar Khayyam avançou além da Álgebra de al-Khwarizmi, incluindo equações de terceiro grau em suas contribuições. Assim como seus predecessores árabes, Khayyam forneceu soluções aritméticas e geométricas para equações quadráticas. No entanto, para equações cúbicas gerais, ele erroneamente acreditava que soluções aritméticas eram impossíveis. Portanto, ele apresentou apenas soluções geométricas utilizando o cubo.

A inovadora abordagem de Khayyam consistiu em generalizar o método de usar cônicas que se cortam para resolver equações de terceiro grau, abrangendo todas aquelas com raízes positivas. Ao encontrar uma equação cúbica em uma obra anterior, observou que não poderia ser resolvida por geometria plana, requerendo secções cônicas para a solução, indo além do uso restrito de régua e compasso.

De acordo com Boyer (2012, p. 173) As equações cúbicas são abordadas de maneira mais concisa utilizando notação e conceitos modernos. Considerando a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, ao substituir x^2 por $2py$ obtemos (lembrando que $x^3 = x^2 \cdot x$) o resultado $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$, cuja equação resulta em uma hipérbole. Ao traçar essa hipérbole e a parábola $x^2 = 2py$ sobre os mesmos eixos coordenados, as abscissas dos pontos

de interseção das duas curvas representam as raízes da equação. Diversos outros pares de secções cônicas podem ser empregados de modo semelhante para resolver a equação cúbica.

A obra de Omar Khayyam revela a complexidade do seu gênio, pois, sem o conceito de coeficientes negativos, ele precisava decompor o problema em casos distintos para parâmetros positivos, negativos ou zero. Khayyam, também tinha que identificar especificamente suas secções cônicas para cada caso, pois o conceito de parâmetro geral não existia. Suas soluções não forneciam todas as raízes da cúbica, pois ele não considerava raízes negativas como apropriadas e não contemplava todas as interseções das secções cônicas. Vale destacar a diferença entre as antigas soluções geométricas gregas, onde os coeficientes eram segmentos de retas, e as soluções de Omar Khayyam, que utilizavam números específicos. A fusão árabe entre a álgebra numérica e a geométrica é reconhecida como uma das contribuições mais frutíferas do ecletismo árabe.

3.4 - A Matemática europeia na Idade Média.

Após a queda do Império Romano do Ocidente, o poder político na Europa migrou para a Gália (atual França), onde os francos estabeleceram um império sólido. Inicialmente, uma coalizão de tribos germânicas de caçadores dispersos, os francos se uniram sob o comando do rei Clóvis I (c. 466 - 511) em 481. Ao adotar a religião católica e a economia agrícola dos gálicos celtas, os francos desenvolveram uma sociedade que combinava elementos das culturas franca, latina e celta por meio de influências culturais recíprocas.

O período que abrange a queda do Império Romano no século V até, aproximadamente, o século XI é caracterizado por conflitos internos, invasões e migrações que resultaram em uma redução significativa da população, deixando grande parte da região em condições de extrema miséria. O ensino praticamente desapareceu, e as instituições escolares romanas estavam extintas. A Igreja Cristã, em crescimento, embora sujeita a conflitos internos, ainda estava gradualmente implementando um sistema educacional. Esse período testemunhou a transição da antiga ordem social para uma nova ordem feudal e eclesiástica.

Durante o primeiro meio milênio da idade medieval, foram pouquíssimas contribuições destinadas à matemática. A escassez de estudiosos culminou num período em que os únicos que podemos creditar ainda que alguma contribuição, são Boécio (c. 475-524), Cassiodoro (c. 480 - 575) e Isidoro de Sevilha (570 - 636). Nenhum desses indivíduos era particularmente versado em matemática; suas contribuições nas áreas de aritmética e geométrica devem ser

entendidas como sendo na intenção de for uma introdução às artes liberais para escolas e bibliotecas monásticas.

A relevância de Boécio reside no fato de seus livros de geometria e aritmética terem sido adotados por escolas monásticas ao longo de muitos séculos. A Geometria de Boécio resumia-se aos enunciados das proposições do Livro I e algumas selecionadas dos Livros III e IV dos Elementos de Euclides, juntamente com aplicações à mensuração; sua Aritmética baseava-se na obra de Nicômaco (60 - 120 d.C.), escrita quatro séculos antes. Com essas obras e suas contribuições filosóficas, Boécio tornou-se o fundador da escolástica medieval. Seus ideais lhe causaram severos problemas políticos que resultaram em prisão e morte, razão pela qual foi proclamado mártir da Igreja.

Cassiodoro foi contemporâneo de Boécio e sucessor como *magister officiorum* (chefe da administração) a serviço do rei Teodoro ou Teodorico, o Grande (c. 454 - 526). Após a queda do reino ostrogótico, dedicou seus últimos anos ao Mosteiro de Vivário, que havia sido fundado por ele. Lá, criou uma biblioteca e instruiu monges na arte precisa de copiar textos manuscritos gregos e latinos, desempenhando um papel crucial na preservação de textos antigos, tanto cristãos quanto os considerados pagãos.

Papel não menos importante, foi o desenvolvido por Isidoro de Sevilha (560 - 636), considerado o homem mais culto de sua época. De acordo com Boyer (2012), ele escreveu a extensa obra chamada de *Origines* ou *Etymologies*, no qual um dos seus vinte capítulos é dedicado à matemática. Este capítulo compreende a matemática em quatro partes: aritmética, geometria, música e astronomia (*quadrivium*). Assim como a *Arithmetic* de Boécio, as partes de aritmética e geometria em sua obra eram restritas a definições e propriedades elementares de números e figuras.

Na Inglaterra, apenas Beda (c.673 – 735) recebe algum destaque, pois a única contribuição científica resulta numa matemática necessária para determinar a data da Páscoa através de um processo aritmético, e a representação dos números pelos dedos.

Entretanto, o trabalho desses ilustres personagens exerceu papel fundamental na preservação dos poucos conhecimentos matemáticos existentes e no que seria transmitido durante o que foi considerado a idade das trevas da ciência.

Em 800, Carlos Magno (c. 742 - 814) foi coroado imperador. Visando tirar seu império da estagnação, convocou o educador Alcuin de York (c. 735-804) para revitalizar a instrução na França. Essa reforma fez com que alguns historiadores denominassem de renascimento Carolingiano. No entanto, apesar de Alcuin não ser considerado um matemático, embora tenha

mostrado influência neopitagórica em suas explicações, deixou uma obra para principiantes sobre aritmética, geometria e astronomia.

Por mais de dois séculos, houve escassa atividade matemática na França e na Inglaterra. Na Alemanha a modesta contribuição a matemática ficou a cargo de Hrabanus Maurus (784-856), que se dedicou a questões astronômicas e ao cálculo da data da Páscoa de Beda.

A mudança significativa no cenário matemático europeu somente viria a ocorrer por volta do século XI com Gerbert d'Aurillac (940 - 1003), que mais tarde se tornaria o Papa Silvestre II (999 -1003). Gerbert nasceu na França, estudou na Espanha e Itália, e serviu na Alemanha como tutor e conselheiro do Imperador Otto III (c. 980 e 1002). Em 999, ao se tornar papa após uma intensa atuação política, escreveu sobre aritmética e geometria, possivelmente influenciado pela tradição de Boécio.

De acordo com Boyer (2012), Gerbert possivelmente foi o primeiro a ensinar na Europa os numerais indo-arábicos. Por seus estudos sobre astronomia, astrologia, foi considerado no mundo ocidental o primeiro inventor mecânico (construiu o primeiro relógio mecânico), e principalmente, por suas ideias reformistas na igreja, foi considerado bruxo e foi assassinado pela população em 1003.

Nessa época em que Gerbert publicava seus trabalhos, difundiu-se na Europa Ocidental os clássicos gregos de ciência e matemática, como os Elementos de Euclides, marcando um período de transmissão do conhecimento grego preservado pelos muçulmanos para os europeus. Esse intercâmbio cultural ocorreu de três maneiras: por meio de traduções latinas feitas por intelectuais cristãos que visitavam centros muçulmanos, relações entre o reino normando da Sicília e o Oriente, e o comércio entre a Europa Ocidental e o mundo árabe.

Geralmente, as traduções ocorriam do árabe para o latim, embora também houvessem algumas do hebreu para o latim, do árabe para o hebreu e, em alguns casos, do grego para o latim. Com a retomada de Toledo dos mouros em 1085, houve um influxo de intelectuais cristãos em busca do saber muçulmano, tornando o século XII um período de grandes tradutores.

Segundo Eves (2004), o sistema de numeração arábica sem o zero, conhecida como Gobar, aparece pela primeira vez em uma cópia espanhola de *Origines* de autoria de Isidoro, datada de 992. Manuscritos de Boécio também exibem formas numéricas semelhantes, chamadas ápicas, utilizadas como contadores em ábacos ou tábuas de cálculo. A introdução desses numerais na Europa é complexa, com incertezas sobre sua origem e uso contínuo. Somente no século XIII, o sistema indo-arábico seria finalmente estabelecido na Europa, resultado da contribuição de vários indivíduos ao longo do tempo.

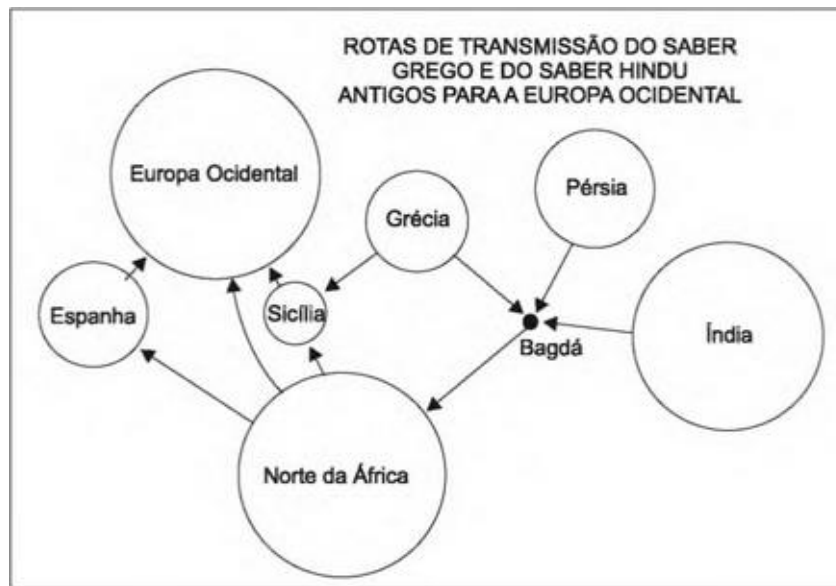
Adelardo de Bath (c. 1120), Platão de Tivoli (1110 - 1145), Abraham bar Hiyya (1092 - 1167) (Savasorda), e Gerardo de Cremona (1114 - 1187), foram alguns dos primeiros tradutores destacados desse período. Adelardo arriscou-se fisicamente para adquirir conhecimento árabe, e conforme relatos de história oral, crê-se que o mesmo para chegar ao conhecimento guardado com tanto zelo teria se disfarçado de estudante árabe. Atribuem-se a ele traduções latinas dos Elementos de Euclides e das tábuas astronômicas de Al-Khowarizmi.

Gerardo de Cremona traduziu mais de 90 trabalhos árabes, incluindo o Almagesto de Ptolomeu, os Elementos de Euclides e a álgebra de Al-Khowarizmi. Gerardo de Cremona não executou esse trabalho sozinho, contou com a colaboração de membros da Escola de Tradutores, iniciativa fundada pelo arcebispo Dom Raimundo após a retomada de Toledo. Destacam-se também outros tradutores notáveis do século XII: João de Sevilha (c. 1090 – c. 1150) e Robert de Chester (c. 1100 – c. 1160), dentre outros.

A Sicília, com sua localização e história política peculiar, também desempenhou um papel significativo como ponto de encontro entre Oriente e Ocidente, facilitando a tradução de manuscritos gregos e árabes para o latim. O comércio italiano com o mundo árabe, liderado por cidades como Gênova, Pisa, Veneza, Milão e Florença, foram pioneiras no estabelecimento de relações mercantis com o mundo árabe, permitindo que mercadores italianos entrassem em contato com a civilização oriental, absorvendo informações aritméticas e algébricas valiosas. Esses mercadores desempenharam um papel crucial na disseminação dos numerais indo-arábicos. Durante esse período, a Espanha tornou-se um elo crucial entre o islamismo e o mundo cristão.

De acordo com Eves (2011. p 293) uma imagem nos ilustra a transmissão de conhecimento pelo mundo durante o período das traduções, e como esse sistema foi essencial para construir a base da matemática na Europa.

Figura 18 — Rotas de transmissão do conhecimento matemático.



Fonte: Eves. H (2011. p 293)

No século XIII, autores como Alexandre de Villedieu (c. 1225), John de Halifax (c. 1200-1256), também conhecido como Sacrobosco e Leonardo de Pisa (c. 1175 - 1250), mais conhecido como Fibonacci ou “filho de Bonaccio”, contribuíram para popularizar os algarismos, destacando-se pelas obras que descreviam as operações fundamentais com numerais indo-arábicos, tratando o zero como um número.

Fibonacci se destacou como o matemático mais talentoso da Idade Média. Nascido em Pisa, uma importante cidade comercial, sua educação foi influenciada por viagens ao norte da África, Egito, Sicília, Grécia e Síria, onde teve contato com métodos matemáticos orientais e árabes. Convencido da praticidade dos métodos indo-arábicos de cálculo, publicou em 1202 sua famosa obra *Liber abaci*, que introduziu esses numerais na Europa. Além da aritmética e álgebra, o livro aborda raízes, equações lineares e quadráticas, com aplicações práticas em diversos contextos.

Figura 19 — Leonardo Fibonacci



Fonte: Google Imagens

Fibonacci também contribuiu com obras sobre geometria e trigonometria, destacando-se como o principal matemático nesse campo desde Diofanto. Sua habilidade matemática notável atraiu a atenção do imperador Frederico II (1194–1250), levando-o a participar de um torneio matemático na corte, onde João de Palermo (c. 1170–c. 1230), um membro do séquito imperial, propôs três problemas.

No primeiro problema, Fibonacci buscou encontrar um número racional x , onde $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossem ambos quadrados de números racionais. Ele forneceu a resposta correta $x = 41/12$, validada pelos cálculos $(41/12)^2 + 5 = (49/12)^2$ e $(41/12)^2 - 5 = (31/12)^2$ como registrado no *Liber quadratorum*.

No segundo problema, a tarefa era encontrar uma solução para a equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci tentou provar que nenhuma raiz da equação poderia ser expressa irracionalmente na forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, ou seja, não poderia ser construída com régua e compasso. Ele obteve uma resposta aproximada, expressa como 1,3688081075 em notação decimal, precisa até a nona casa, conforme apresentado em um de seus trabalhos, intitulado *Flos*.

Após Fibonacci, poucos matemáticos tiveram tanta relevância pelos próximos 300 anos, até a tomada de Constantinopla pelos otomanos, em 1543. Esse acontecimento marcou um novo período da história política, dando fim ao que é chamado idade das trevas e ganhando a forma de renascimento.

4. A Matemática europeia renascentista

A tomada de Constantinopla, ocorrida em 29 de maio de 1453, foi um evento histórico crucial que marcou o fim do Império Bizantino, que perdurou por mais de mil anos. O impacto da tomada de Constantinopla reverberou internacionalmente, provocando reações mistas na Europa, implicando numa nova fase, que os autores denominam como Renascimento. O Renascimento, iniciado no final do século XIV na Itália e estendendo-se até o século XVII, representa um movimento cultural e intelectual que desempenhou um papel crucial na transição entre a Idade Média e a Era Moderna.

Esse período é notável por sua ênfase renovada no humanismo, que promovia a valorização do ser humano, na redescoberta das obras clássicas da Antiguidade e no florescimento das artes, ciências e pensamento crítico. O Renascimento não apenas testemunhou o ressurgimento das práticas artísticas realistas e simétricas, mas também impulsionou avanços significativos nas áreas científicas e filosóficas, marcando assim uma fase fundamental na evolução cultural e intelectual da sociedade europeia.

Em relação ao que se refere aos estudos da Matemática, durante essa época, houve um ressurgimento do interesse nas obras matemáticas da Antiguidade Clássica, como as de Euclides e Arquimedes, fundindo com os conhecimentos desenvolvidos pelas civilizações ocidentais e orientais da idade média.

Além disso, é no período renascentista que veremos a fase final do simbolismo algébrico com François Viète (1540–1603) e René Descartes (1596–1650), na utilização de letras para designar coeficientes e variáveis.

4.1 - Modernização da Matemática Ocidental

O século XV testemunhou o início do Renascimento Europeu marcado pela revitalização nas artes e no conhecimento científico. O colapso do Império Bizantino e a queda de Constantinopla resultaram em uma convergência de refugiados para a Itália, trazendo consigo tesouros da civilização grega. Muitos clássicos, anteriormente conhecidos apenas por meio de traduções árabes, tornaram-se acessíveis em fontes originais. Além disso, a invenção da imprensa de tipos móveis na metade do século revolucionou a comercialização de livros, possibilitando a rápida disseminação do conhecimento. Ao fechar do século, a América já havia sido descoberta, e a circunavegação da terra estava prestes a acontecer.

Neste mesmo século as cidades italianas e centros como Nuremberg, Viena e Praga foram centros de atividade matemática, focalizando especialmente aritmética, álgebra e trigonometria. Esse desenvolvimento foi impulsionado pelas necessidades comerciais, navegação, astronomia e agrimensura nas crescentes cidades mercantis.

Diversos nomes foram surgindo para o crescimento da matemática, no que podemos retratar de forma cronológica: Nicholas Cusa (1401-1464), nascido em Cuers, ascendeu rapidamente na hierarquia da Igreja, tornando-se cardeal e governador de Roma. Embora não tenha sido predominantemente matemático, sua contribuição notável incluiu trabalhos na reforma do calendário e tentativas de quadratura do círculo e trissecção do ângulo.

Após Cusa, Georg von Peurbach (1423-1463), discípulo de Cusa, estabeleceu-se como matemático em Viena, fazendo da universidade local, centro matemático da geração. Peurbach é dito superior até mesmo a Cusa, contribuindo com aritmética, astronomia e uma tabela de senos, publicada postumamente. Ele também iniciou a tradução do *Almagesto* de Ptolomeu do grego para o latim.

Entretanto, por mais que esses estudiosos tenham seus créditos, o matemático de maior influência do século XV foi Johann Müller (1436-1476), conhecido como Regiomontanus, nome latinizado de sua cidade natal Königsberg (montanha do rei). Estudou com Peurbach e destacou-se como tradutor finalizador do *Almagesto*. Traduziu também, do grego, trabalhos de Apolônio (15 d.C. - 98 d.C.), Herão (10 d.C. - 80 d.C.), e Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.). E foi autor do tratado *De triangulis omnimodis*.

Seu tratado, foi escrito por volta de 1464, mas só foi publicado em 1533, é a mais importante de suas obras; trata-se da primeira exposição sistemática europeia de trigonometria plana e esférica. Regiomontanus se estabeleceu em Nuremberg em 1471, onde construiu um observatório, uma prensa tipográfica e realizou contribuições significativas à astronomia. Seu falecimento, em 1476, permanece cercado de mistério, com relatos variando entre peste e envenenamento.

O *triangulis omnimodis* de Regiomontanus, é dividido em cinco livros, destaca sua ênfase na determinação de triângulos sob condições específicas. Aplicando a álgebra em várias ocasiões, ele atribui valores numéricos específicos às partes dadas, utilizando funções trigonométricas como seno e cosseno. Posteriormente, calculou uma tabela de tangentes e aplicou álgebra e trigonometria à construção de quadriláteros cíclicos.

Ainda no século XV, Nicolas Chuquet (c.1445 – c.1488), nascido em Paris, destacou-se como o mais brilhante matemático francês, se dedicou à medicina em Lyon. Em 1484, ele escreveu a aritmética *Triparty en la science des nombres*, abordando cálculos com números

racionais, irracionais e a teoria das equações. Chuquet, embora tenha admitido expoentes inteiros, positivos e negativos, e utilizado álgebra sincopada, não teve influência significativa em seus contemporâneos devido à avançada natureza de seu trabalho. Faleceu em torno de 1500.

Luca Pacioli (c. 1445–1517), um frade franciscano, publicou em 1494 a *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, conhecida como “Suma”. Essa compilação abrange aritmética, álgebra e geometria, apresentando algoritmos para operações fundamentais, métodos para extração de raiz quadrada e uma abordagem completa da aritmética mercantil. A álgebra da *Summa* incluía equações quadráticas, utilizando notação sincopada com abreviações como p (de *piu*, mais) para indicar a adição, m (de *meno*, menos) para indicar a subtração, co (de *cosa*, coisa) para a incógnita, ce (de *censo*) para x^2 , cu (de *cuba*) para x^3 e cece (de *censo-censo*) para x^4 . A igualdade às vezes é indicada por ae (de *aequalis*).

Apesar de erros numéricos, a parte aritmética tornou-se padrão na época. A geometria, apesar de limitada, incorporou a álgebra na resolução de problemas geométricos. Após a “Suma”, a álgebra experimentou crescimento intenso na Itália e em outros lugares.

Pacioli, publicou em 1509, *De divina proportione*, ilustrado por Leonardo da Vinci. Neste contexto, o uso dos símbolos + e -, registrados por Johann Widman em 1489, inicialmente indicava excesso e deficiência, sem os significados operacionais modernos. Em 1514, Vander Hoecke (c. 1480) os utilizou como símbolos de operações algébricas, sugerindo que já eram empregados com esse significado anteriormente.

Decorrente da “Suma” de Pacioli, marca-se uma nova fase na história da matemática algébrica, no que tange ao processo de simbolismo. Veremos agora, como importantes matemáticos finalizaram o processo que levou séculos, fomentando uma linguagem que é usada até os dias atuais.

Após a obra de Pacioli, a aritmética cresceu fortemente na Europa, sendo impressa uma grande quantidade de livros até o século XVIII, principalmente na França, Itália e Inglaterra. A aritmética auxiliou a produção de inúmeros trabalhos sobre a Álgebra. Por exemplo, a Aritmética de Treviso, que surgiu anonimamente em 1478. Essa obra comercial aborda a escrita e cálculos com números, apresentando aplicações em sociedades e trocas. Além dos algoritmos do século XIV, inclui questões recreativas, sendo o primeiro livro matemático impresso no mundo ocidental.

De acordo com Eves (2011), na Itália, a aritmética comercial de Piero Borghi (1424 - 1494), publicada em Veneza em 1484, superou a influência da Aritmética de Treviso. Esse trabalho prático teve 17 edições, sendo a última em 1557. Em Florença, Filippo Calandri (século

XV) publicou uma aritmética em 1491, destacando-se por apresentar o primeiro impresso do moderno processo de divisão e os primeiros problemas ilustrados na Itália. A “*Summa*” de Pacioli, também dedicou uma parte significativa à aritmética, oferecendo *insights* sobre as práticas comerciais da época.

Na Alemanha, a aritmética de Johann Widman (c. 1460 - 1498), em 1489, teve grande influência. Jacob Kobel (1540 - 1616), de Heidelberg, contribuiu com uma aritmética popular, alcançando 22 edições a partir de 1514. No entanto, a mais influente na Alemanha foi a obra de Adam Riese (1492 - 1559), publicada em 1522, que ganhou reputação por significar cálculo correto na linguagem popular alemã. Na Inglaterra, Cuthbert Tonstall (c. 1474 - 1559) publicou a primeira aritmética dedicada inteiramente à matemática em 1552, baseada na “*Summa*” de Pacioli.

Robert Recorde (c. 1512 - 1558), foi o mais influente autor inglês do século XVI, escreveu seus trabalhos em forma de diálogos entre mestre e estudante. Seu primeiro livro, *The Ground of Artes*, publicado por volta de 1542, teve 29 edições. Estudou em Oxford e Cambridge, foi médico de Eduardo VI e da rainha Maria, mas acabou na prisão no final da vida, possivelmente relacionado ao seu trabalho na Irlanda como chefe do Departamento de Minas e Moedas.

Robert Recorde contribuiu significativamente para diversos campos, escrevendo textos sobre astronomia, geometria, medicina e álgebra. Em sua obra de astronomia, *The Castle of Knowledge* (1551), apresentou o sistema de Copérnico aos leitores ingleses. Em seu trabalho de geometria, *The Pathway to Knowledge* (1551), condensou os Elementos de Euclides. Notavelmente, sua álgebra, *The Whetstone of Witte* (1557), introduziu o moderno símbolo de igualdade, justificado pela lógica de que nada pode ser mais igual que duas retas paralelas.

O radical ($\sqrt{}$), foi introduzido por Christoff Rudolff (1499 - 1545), em 1525 em seu livro *Die Coss*. Michael Stifel (1487 - 1567), considerado um destacado algebrista alemão do século XVI, publicou uma edição aprimorada desse trabalho em 1553.

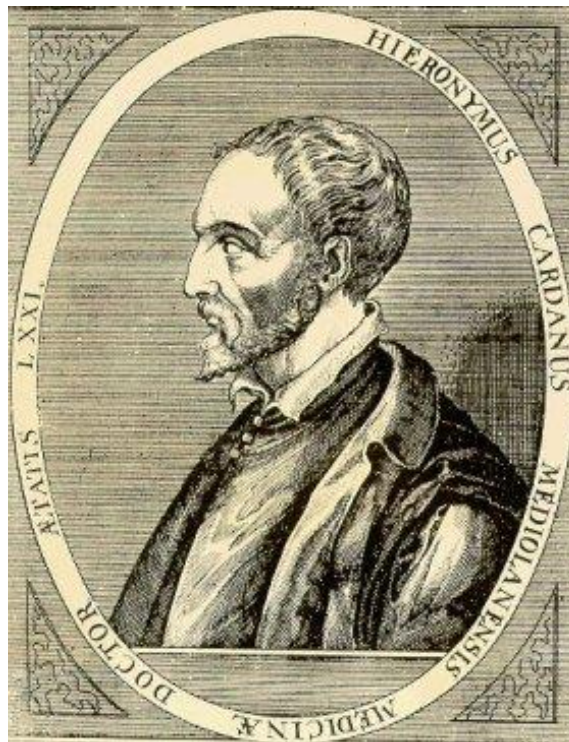
Sua obra mais conhecida, *Arithmetica Integra* (1544), aborda números racionais, irracionais e álgebra. Stifel antecipou a ideia dos logaritmos ao destacar a associação entre progressões aritméticas e geométricas. Além disso, fornece coeficientes do desenvolvimento binomial até a ordem 17. A terceira parte de sua obra aborda equações, descartando raízes negativas e utilizando sinais e representações algébricas para incógnitas.

A obra *Arithmetica integra* de Stifel, representou um tratamento abrangente da álgebra contemporânea, mas em pouco tempo foi superada. Stifel explorou exemplos levando a equações quadráticas, contudo, sua abordagem não incluiu equações cúbicas. A álgebra de

Stifel era limitada, uma vez que ele não acrescentou nada à solução algébrica das cúbicas do que tinham feito Pacioli ou Omar Khayyam.

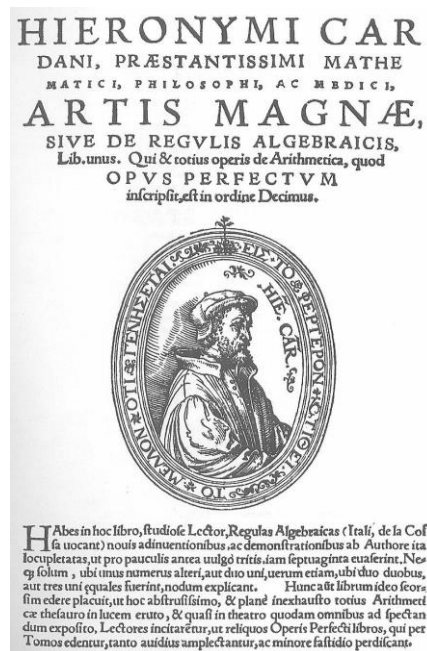
Entretanto, inesperadamente em 1545, Gerônimo Cardano (1501-1576) publicou a *Ars magna*, marcando um avanço significativo ao divulgar a solução para equações cúbicas e quárticas, embora posteriormente tenha admitido ter recebido a solução da cúbica de Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557) e a da quártica de Ludovico Ferrari (1522-1565).

Figura 20 — Gerônimo Cardano (1501-1576)



Fonte: Google Imagens

Figura 21 — Ars Magna



Fonte: Google Imagens

O curioso é que possivelmente Cardano deixou de mencionar na Ars magna, o segredo de onde Tartaglia tinha descoberto sua invenção, que desejava mencionar mais tarde em seu tratado. A possível fonte de Tartaglia para a resolução da cúbica pode ter sido de Scipione del Ferro (c. 1465 - 1526) um professor em Bolonha que, antes de sua morte, compartilhou a descoberta com seu aluno Antonio Maria Fior (1465 - 1526).

Figura 22 — Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557)



Fonte: Google Imagens

A possibilidade de resolver a cúbica inspirou Tartaglia a explorar o método por volta de 1541. Uma competição foi organizada entre Tartaglia e Fior, onde Tartaglia triunfou ao resolver todas as trinta questões propostas por Fior. Nessa época, as equações cúbicas eram tratadas de acordo com coeficientes positivos, e Fior estava limitado a equações do tipo $x^3 + px = q$, onde buscava somente soluções positivas. Em contraste, Tartaglia dominava também equações onde cubos e quadrados eram igualados a um número.

De acordo com Boyer (2012, p. 202), no livro de Cardano, a ênfase é dada à resolução da equação específica $x^3 + 6x = 20$, que pode ser expressa de forma geral como $x^3 + px = q$. No entanto, Cardano não abordou a solução geral para essa forma de equação, pois a forma de relacionar letras a números viria aparecer mais a frente com François Viète, mas concentrou-se na resolução geométrica do caso específico mencionado.

Ainda com Boyer (2012, p. 202) Cardano resolve o problema $x^3 + 6x = 20$, da seguinte forma: substitua x por $u - v$ e suponha que u e v estejam relacionados de modo que seu produto seja um terço do coeficiente de x , isto é, $uv = 2$. Substituindo na equação, o resultado é $u^3 - v^3 = 20$ e, eliminando v , temos $u^6 = 20u^3 + 8$, uma equação quadrática em u^3 . Assim u^3 vale $\sqrt{108} + 10$. Dessa relação $u^3 - v^3 = 20$, conseguimos que $v^3 = \sqrt{108} - 10$, assim $x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. Que confirma o resultado. Portanto é suficiente dizer que Cardano chegou na equação resolutive de $x^3 + px = q$, com seguinte expressão:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Segundo Lima (1987), Cardano mostrou que para equações do tipo $x^3 + px = q$ a substituição de x por uma nova variável da forma $x = y - a/3$, permite desaparecer o termo x^2 e recair sobre a equação já solucionada por ele.

A fórmula geral da equação completa de terceiro grau foi obtida por Cardano da seguinte forma:

Seja a equação completa do terceiro grau é dada por

$$a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0.$$

Dividindo todos os termos por a , obtemos:

$$x^3 + \frac{b'}{a'}x^2 + \frac{c'}{a'}x + \frac{d'}{a'} = 0$$

tomando o coeficiente de x^3 sendo 1, podemos reescrever a equação acima na forma

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Dada a equação acima, fazendo a substituição de Cardano, $x = y - \frac{a}{3}$, transformamos a equação acima em

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

ou seja, resolvendo os produtos acima, obtemos

$$\left(y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} - \frac{a^3}{27}\right) + \left(ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9}\right) + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

simplificando a expressão, podemos reescrever da forma:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0$$

tomando $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$. Note que obtemos uma equação sem o termo quadrado, portanto podemos reduzir a forma

$$y^3 + py + q = 0.$$

Para resolver este tipo de problema, utilizaremos $y = u + v$, onde substituindo na equação acima obtemos

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto, basta encontrarmos números u, v tais que

$$u^3 + v^3 = -q; \quad e \quad uv = -\frac{p}{3}; \quad (1)$$

ou seja, é equivalente dizer que buscamos

$$u^3 + v^3 = -q; \quad (2) \quad e \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27};$$

então $x = u + v$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Note que das equações acima, é fácil descobrimos as soluções sabendo a soma e produtos das raízes, pois note que das equações acima (1), podemos isolar v da forma $v = -\frac{p}{3u}$, substituindo em (2) obtemos

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} = -q$$

multiplicando ambos os lados por u^3 , obtemos

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

que é uma equação do segundo grau em u^3 . Tomando u^3 como w note que obtemos a seguinte equação:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Para facilidade de cálculos usaremos a forma resolutive para escrevemos a raiz de w , logo

$$w = \frac{-(q) \pm \sqrt{(-q)^2 - 4.1.(-\frac{p^3}{27})}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

como $w = u^3$, logo obtemos a seguinte raiz de u e v

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ e } v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Assim, como $y = u + v$ e $x = y - \frac{a}{3}$ temos que a fórmula geral para equação do terceiro grau da forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, onde $p = b - \frac{a^2}{3}$ e $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$, da seguinte forma:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{a}{3}.$$

Note que, por causa das raízes, faz-se necessário analisar os casos onde a equação terá solução no conjunto dos complexos. Para tanto não trataremos essas análises neste trabalho, pois seu intuito é apenas discursivo.

Também na obra *Ars magna*, Cardano apresenta a resolução das equações de 4º grau. Segundo Boyer (2012, p. 202), uma das equações resolvidas por Cardano é $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, seguindo o modelo abaixo:

1. Primeiro, some a ambos os membros da equação quadrados e números suficientes de modo que o primeiro membro se torne um quadrado perfeito.
 2. Agora, some a ambos os membros da equação termos envolvendo uma nova incógnita, de modo que o primeiro membro continue a ser um quadrado perfeito.
 3. O passo seguinte, crucial, consiste em escolher y de modo que o trinômio no segundo membro fique um quadrado perfeito. Isso se faz, é claro, igualando a zero o discriminante — uma regra antiga e bem conhecida.
 4. O resultado do passo 3 é uma equação cúbica em y : $y^3 + 15y^2 + 36y = 450$, conhecida atualmente como “cúbica resolvente” da equação quártica dada. A equação para y é então resolvida pelas regras dadas anteriormente para a resolução de equações cúbicas.
 5. Substitua um valor de y , do passo 4, na equação para x , do passo 2, e tome a raiz quadrada de ambos os membros.
 6. O resultado do passo 5 é uma equação quadrática, que agora deve ser resolvida para encontrar o valor desejado de x .
- (Boyer, 2012, p. 202)

Entretanto, para que se aplique o método de Ferrari, em uma equação quártica qualquer, é necessário fazermos algumas manipulações preliminares, para que seja possível aplicar seu modelo resolutivo. Portanto considere a equação geral completa do 4º grau, dada por:

$$a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e' = 0$$

dividindo ambos os termos por a , obtemos:

$$x^4 + \frac{b'}{a'}x^3 + \frac{c'}{a'}x^2 + \frac{d'}{a'}x + \frac{e'}{a'} = 0$$

tomando o coeficiente de x^4 como 1, podemos reescrever a equação acima na forma:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Dada a equação acima, fazendo a substituição de Cardano, $x = y - \frac{a}{4}$, transformamos a equação acima em

$$\left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0$$

ou seja, resolvendo os produtos acima, obtemos:

$$\left(y^4 + \frac{3a^2y^2}{8} + \frac{a^4}{256} - ay^3 - \frac{a^3y}{16}\right) + \left(ay^3 - \frac{3a^2y^2}{4} + \frac{3a^3y}{16} - \frac{a^4}{64}\right) + \left(by^2 - \frac{bay}{2} + \frac{ba^2}{16}\right) + \left(cy - \frac{ca}{4}\right) + d = 0$$

reduzindo essa expressão, e reorganizando, obtemos

$$y^4 + \left(\frac{3a^2}{8} - \frac{3a^2}{4} + b\right)y^2 + \left(-\frac{a^3}{16} + \frac{3a^3}{16} - \frac{ba}{2} + c\right)y + \frac{a^4}{256} - \frac{a^4}{64} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d = 0$$

novamente, reduzindo ainda mais esta expressão, obtemos

$$y^4 + \left(-\frac{3a^2}{8} + b\right)y^2 + \left(\frac{2a^3}{16} - \frac{ba}{2} + c\right)y + \left(\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d\right) = 0.$$

tomando

$$\left(-\frac{3a^2}{8} + b\right) = p, \left(\frac{2a^3}{16} - \frac{ba}{2} + c\right) = q \text{ e } \left(\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d\right) = r$$

podemos reescrever a equação como:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

A partir desta forma, podemos aplicar o método de Ferrari. Segundo Eves (2011, p. 305), seguindo o modelo descrito por Ferrari, pelo primeiro passo (1.), obtém-se

$$x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2.$$

ou

$$(x^2 + p^2) = px^2 - qx + p^2 - r.$$

Assim, tomando um arbitrário y, passo (2.), temos que

$$\begin{aligned} (x^2 + p + y)^2 &= px^2 - qx + p^2 - r + 2y(x^2 + p) + y^2 \\ &= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2). \end{aligned}$$

Escolhendo um y de modo que o segundo membro da equação acima seja um quadrado, passo (3.), isso acontece quando

$$4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0$$

ou, resolvendo o produto acima obtemos

$$4p^3 - 4pr + 16p^2y + 20py^2 - 8ry + 8y^3 - q^2.$$

Note que retornamos a uma equação cúbica em y , onde aplica-se o mesmo procedimento para resolução de equações cúbicas.

Portanto, a genialidade de resolução das equações cúbicas e quárticas apresentadas por Cardano, representa uma notável contribuição para a álgebra.

Muitos outros matemáticos foram influenciados pela obra de Cardano, fazendo contribuições significativas dentro da matemática, como é o caso do matemático francês, François Viète. Nascido em Fontenay, em 1540, estudou advocacia e foi membro do parlamento provincial da Bretanha, mas dedicou a maior parte de seu tempo de lazer à matemática. Faleceu em 1603, em Paris.

Figura 23 — François Viète (1540 - 1603)



Fonte: Google Imagens

A extensa obra de Viète abrange trigonometria, álgebra e geometria, incluindo trabalhos notáveis como *Canon mathematicus seu ad triangula* (1579), *In artem analyticam isagoge*

(1591), *Supplementum geometriae* (1593), *De numerosapotestatum resolutione* (1600), e *De aequationum recognitione et emendatione* (publicado postumamente em 1615).

O mais famoso desses trabalhos é, *In artem analyticam isagoge*, por introduzir o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para constantes. Por causa disto, é creditado a ele o simbolismo da escrita algébrica, utilizada até os dias atuais.

As obras de Viète são um verdadeiro tesouro para a história da álgebra. Ele demonstrou inúmeros procedimentos para resolução de equações quadráticas, cúbicas, e quárticas e tentou para grau superiores. Veremos agora, alguns métodos citados por Eves (2011, p. 310), das equações de Viète.

O método para deduzir um modelo geral para equações quadráticas consiste em considerar duas novas variáveis, u e v e fazer a manipulação $x = u + v$.

Seja a equação quadrática na sua forma completa, ou seja $ax^2 + bx + c = 0$, tal que $a \neq 0$. Fazendo a manipulação de Viète obtemos

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$

Isto é,

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

Isolando o termo v na equação anterior, obtemos

$$au^2 + v(2au + b) + av^2 + bu + c = 0 \quad (1)$$

Viète transformou a equação (1) em uma equação do segundo grau fazendo $2au + b = 0$ e assim $u = \frac{-b}{2a}$, que anula o segundo termo da equação (1).

Substituindo $u = \frac{-b}{2a}$, na equação (1), obtemos

$$a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + v\left(2a\left(\frac{-b}{2a}\right) + b\right) + av^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

Isso equivale a

$$\begin{aligned} av^2 + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0 \Rightarrow av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0 \\ \Rightarrow \frac{4a^2v^2 + b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} &= 0 \Rightarrow 4a^2v^2 - b^2 + 4ac = 0 \\ \Rightarrow 4a^2v^2 &= b^2 - 4ac \Rightarrow v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Note que se $b^2 - 4ac \geq 0$, então $v = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, portanto como $x = u + v$, logo a raiz da equação quadrática é dada por

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \text{ ou } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Note que pelo método de Viète se chega a fórmula geral da equação de segundo grau, conhecida no Brasil por fórmula de Bhaskara.

Além deste método, Viète possuía uma grande habilidade em reduções de equações. Na obra *De numerosa* encontramos a conhecida transformação que adiciona uma constante e a que multiplica as raízes de uma equação por uma constante. Nesse contexto, apresentou uma solução elegante para a equação cúbica $x^3 + ax = 2b$. Fazendo o seguinte:

Tome

$$x = \frac{a}{y} - y$$

Substituindo na equação acima, torna-se

$$y^6 + 2by^3 = a^3$$

que é uma equação quadrática em y^3 . Assim acha-se y^3 , depois y e depois x .

Para as equações de 4º grau, a solução de Viète da quártica é semelhante à de Ferrari. Vejamos, considere a quártica abaixo:

$$y^4 + ax^2 + bx = 0 \quad (1)$$

Viète descobriu que a equação quártica pode se reduzir somando o termo $x^2y^2 + y^4/4$ em ambos os lados. Com isso, reescrevendo a equação (1) acima, temos que

$$x^4 = c - ax^2 - bx$$

Aplicando a transformação de Viète obtemos

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)^2 = (y^2 - a)x^2 - bx + \left(\frac{y^4}{4} + c\right)$$

Escolhe-se então y de modo que o segundo membro seja um quadrado perfeito. A condição para tanto é que

$$y^6 - ay^4 + 4cy^2 = 4ac + b^2$$

uma cúbica em y^2 . Pode-se então achar um y e concluir o problema extraindo raízes quadradas.

Embora esses métodos sejam válidos para as equações acima, eles não tomaram tanta relevância quanto o método de aproximações apresentado na obra *De numerosa potestatum*. Tal método esteve em uso até por volta de 1680, e sistematicamente busca aproximações sucessivas de uma raiz de uma equação.

Vejamos como esse método era aplicado. Seja a equação

$$x^2 + mx = n \quad (1)$$

Suponha um valor x_1 seja um valor aproximado de uma raiz, podendo ser expressa como $x_1 + x_2$. Ou seja, um valor complementar a essa raiz. Substituindo essa soma na equação (1) Obtemos

$$(x_1 + x_2)^2 + m(x_1 + x_2) = n$$

ou, equivalentemente

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + mx_1 + mx_2 = n$$

Assumindo que x_2^2 seja um número tão pequeno que possa ser desprezado, obtemos o seguinte

$$x_2 = \frac{n - x_1^2 - mx_1}{2x_1 - m}$$

A partir desta aproximação melhorada da soma $x_1 + x_2$, podemos a partir do mesmo método, calcularmos uma aproximação ainda maior com $x_1 + x_2 + x_3$. Viète usou esse método para aproximar uma raiz de

$$x^6 + 6000x = 191246976$$

Também, buscou através de métodos geométricos, determinar raízes de equações cúbicas e usou a trigonometria para reduzir equações e buscar soluções. Isso, evidentemente, ocorreu quando ele observou que o problema de trissecção do ângulo levava a uma equação cúbica.

Em 1593, François Viète teve uma oportunidade incomum de aplicar suas fórmulas para ângulos múltiplos. O desafio veio do matemático e professor de medicina belga Adriaen van Roomen (1561-1615), que propôs resolver uma equação de grau $x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \dots - 3795x^3 + 45x = k$. Das 45 raízes ele encontrou mais de 20.

Christopher Clavius (1538 - 1612), Pietro Antônio Cataldi (1548 - 1626), Simon Stevin (1548-1620), Nicolau Copérnico (1473 - 1543) foram outros principais matemáticos do século XVI que se dedicaram e contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento da ciência.

Descartes, em 1637, introduziu a convenção moderna de usar as últimas letras do alfabeto para incógnitas e as primeiras para constantes e, não só isso, com a criação da Geometria Analítica, as equações passam a ser estudadas analiticamente. E assim, o estudo das equações do I ao IV grau estariam definitivamente concluídos.

Por volta de 1750, Euler tentou reduzir a resolução de uma equação quártica à de uma quártica associada, mas não teve sucesso. Essa tentativa também falhou quando Lagrange (1736 - 1813) a retomou cerca de 30 anos depois. O médico italiano Paolo Ruffini (1765 - 1822) tomou outro caminho, buscando em 1803, 1805 e 1813, provar que as raízes de equações gerais de grau cinco ou superior não podem ser expressas por meio de radicais em termos dos

coeficientes, um fato que foi demonstrado de maneira conclusiva por Niels Henrik Abel (1802 - 1829) em 1824. Em 1858, Charles Hermite (1822 - 1901) ofereceu uma solução para a equação quártica geral usando funções elípticas.

O sucesso de Hermite abriu caminho para representar uma raiz de uma equação geral de grau n por meio de funções fuchsianas. Desenvolvimentos modernos na teoria das equações, envolvendo nomes como Bring (1736 - 1798), Jerrard (1804 - 1863), Tschirnhausen (1651 - 1708), Galois (1811 - 1832), Jordan (1838 - 1922), dentre outros, foram fascinantes e são reconhecidos ao longo do tempo.

5. Considerações Finais

Procuramos fazer neste trabalho, um resumo dos principais pontos que deram origem ao estudo da álgebra. Esperamos que cada leitor sacie sua curiosidade sobre a origem, as tentativas e o longo caminho percorrido até se encontrar as resoluções das equações polinomiais de até 4º grau. É também, uma tentativa de incentivar alunos, professores e todos os que gostam da matemática a pesquisarem outros temas relacionados, e/ou que não foram abordados aqui, visto que, sobre esse tema, recai uma imensidão de assuntos para serem explorados. Outrossim, temas como: a história das equações de graus maiores que quatro, o desenvolvimento da álgebra a partir do século XVII, a influência da álgebra na matemática moderna, história da Geometria, etc., ainda precisam ser estudados. Além disso, apesar da Álgebra Elementar está bem definida, tamanha é a abrangência e importância da Álgebra que houve a necessidade de sua divisão em Álgebra Abstrata, Computacional, Linear, Booleanae entre outras.

Com isso, é possível observar o quanto a história nos serve de guia para um ponto de partida pela busca de novos conhecimentos e respostas às lacunas matemáticas. E a História da Matemática vem justamente para resgatar, guardar e reutilizar esses processos que poderão ser ressignificados dentro de uma nova importância, seja na perspectiva Matemática, Computacional ou Educacional.

6. Referências

BERTATO, Fábio Maia. A falsa (su-) posição? Tradução dos problemas 24, 25, 26 e 27 do Papiro de Rhind. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 18, n. 36, p. 11-29, 2018.

BOYER, Carl B.; Uta C. Merzbach. **História da matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. - Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FRAGOSO, W. C. **Uma Abordagem Histórica da Equação do 2º Grau**. RPM. n. 43. p. 20 a 25. 2000.

IEZZI, G. e MURAKAMI C. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 1, 8a edição, São Paulo, Ed. Atual, 2004.

LIMA, Elon L. **A equação do terceiro grau**. Matemática universitária. nº 5. p. 09 a 23. 1987.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Uma breve história da equação do 2º grau**. In. Revista Eletrônica de matemática, nº 2, 2010. Disponível em: < <http://www.matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/eq2grau.pdf> >. Acesso em: 27 de Fevereiro de 2016.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro. Zahar. 2012.

SANTOS, R.; VEIGA, A. **Papiro de Rhind** (2002). Site: Olga Pombo, 2002.

SOUZA, C. Monteiro ; SANTOS, Nelcy Magdala Moura ; ARAUJO, M. P. Silva . **História da Matemática**. Recife: EDUFRPE, 2010 (Livro Didático).

STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**; 2a ed. Gradiva. 1992.

MORGADO, J. **Equações do 2º grau ou equações quadráticas (um pouco da sua história)**. Millenium, 1999.

RUFINO, Francisco Aldrin Armstrong. **Métodos Algébricos E Geométricos Para Determinação Das Raízes Das Equações Polinomiais De Graus Dois, Três E Quatro**. João Pessoa-PB. UFPB, 2013.